

**ÜBER DIE STABILITÄT
VON JULIA-MENGEN**

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

vorgelegt von
Hartje Kriete
aus Ottersberg

Bremen, 1989





Digitized by the Internet Archive
in 2026

ÜBER DIE STABILITÄT VON JULIA-MENGEN

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

vorgelegt von
Hartje Kriete
aus Ottersberg

Bremen, 1989

Die Dissertation lag dem Promotionsausschuß Dr.Ing./Dr.rer.nat. der Universität Bremen vor. An dem Promotionsverfahren haben als Gutachter Prof.Dr.W.Fischer, Bremen, und Prof.Dr.S.J. Patterson, Göttingen, mitgewirkt. Das Kolloquium fand am 28. Juli 1989 statt.

Inhalt

Einführung	1
I. Überblick über die klassische Theorie	6
I.1 Die klassische Theorie	6
I.2 Konforme Konjugationen	13
I.3 Holomorphe Familien rationaler Funktionen	16
II. Stabilität ausgefüllter Julia-Mengen	21
II.1 Stetigkeit ausgefüllter Julia-Mengen von Polynomen	21
II.2 Verallgemeinerung für rationale Funktionen	29
II.3 Das Beispiel von Pierre Lavours	31
II.4 A-priori-Aussagen	35
III. Quasikonforme Chirurgie	40
III.1 Überblick	40
III.2 Quasikonforme Abbildungen	43
III.3 Die quasikonforme Chirurgie	46
III.4 Beweis der ersten Aussage von Theorem III.2'	50
III.5 Verwandlung von Herman-Ringen in Siegel-Scheiben	58
III.6 Ample Teilmengen kritischer Werte	66
IV. Ränder hyperbolischer Komponenten	74
IV.1 Ränder Hyperbolischer Komponenten	74
IV.2 Beweis von Theorem IV.1	78
IV.3 Der Stetigkeitssatz	83
V. Approximation von Siegel-Scheiben	86
V.1 Überblick	86
V.2 Yoccoz' Lösung zur Approximation von Siegel-Scheiben	87
V.3 Verallgemeinerung - der Trick	90
V.4 Vorbereitung des Beweises	92
V.5 Ende des Beweises - Konstruktion von $\mathcal{R}$	96
VI. Approximation rational indifferenter Zyklen	101
VI.1 Reduktion auf Normalform	102
VI.2 Reduktion auf bestimmte Kompakta	105
VI.3 Konstruktion der Umgebung U_λ	106
Literaturverzeichnis	111

Einführung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Stabilität von Julia-Mengen; damit ist sie in das noch junge Forschungsgebiet "Dynamische Systeme" einzuordnen. Dynamische Systeme gehören mittlerweile zum Alltag der Naturwissenschaftler und Ingenieure. Beispiele sind das Wetter, chemische Reaktionsvorgänge, turbulente Strömungen in Flüssigkeiten und Entwicklungen von Populationen. Auch wenn die Verknüpfung von Ursache und Wirkung in den entsprechenden mathematischen Modellen durch einfache Formeln beschrieben werden kann, so ist in vielen Fällen eine Vorhersage der zeitlichen Entwicklung des Systems (noch) unmöglich.

Eine große Klasse dynamischer Systeme läßt sich in der Sprache der Mathematik als Iteration rationaler Funktionen beschreiben. Dieses erkannte bereits P.F. Verhulst, der Mitte des 19. Jahrhunderts bei dem Studium des Wachstums von Populationen mit begrenztem Lebensraum auf die Iteration quadratischer Polynome (mit reellen Koeffizienten) stieß. Ein weiteres wichtiges Beispiel sind Modelle von Phasenübergängen. Ihr Studium führte 1970 den Physiker K.G. Wilson auf die Iteration rationaler Funktionen vierten und sechsten Grades. In der Mathematik ist das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen eines gegebenen Polynoms eine Anwendung der Iteration rationaler Funktionen.

All diesen Systemen ist gemeinsam, daß sie sich in verschiedene Richtungen entwickeln können. Die Grenze zwischen den Anfangszuständen verschiedener Entwicklungsrichtungen eines solchen Systems ist gerade die Julia-Menge der entsprechenden rationalen Funktion.

Diese Julia-Mengen wurden zum ersten Mal um 1920 von den französischen Mathematikern Gaston Julia und Pierre Fatou untersucht. Beide stellten fest, daß die Julia-Mengen entweder eine sehr einfache Form besitzen, nämlich Kreise oder Kreisbögen sind, oder daß sie unendlich kompliziert sind und sich somit der menschlichen Vorstellung entziehen. Es ist daher nicht verwunderlich, daß diese Theorie für etwa 50 Jahre in einen Dornröschenschlaf fiel.

Erst die Entwicklung leistungsfähiger Computer mit Graphikbildschirmen ermöglichte die Darstellung von Fraktalen, zu denen auch die Julia-Mengen gehören. Seitdem wurden an verschiedenen Orten in der Welt serienweise Bilder von Julia-Mengen hergestellt. Dabei konnte man das folgende Phänomen beobachten: Wenn man eine rationale Funktion etwas variiert, so ändert sich fast immer die Julia-Menge nur wenig und behält ihren topologischen Charakter bei.

Es gibt aber auch Ausnahmen. Bei diesen kann man das folgende Verhalten erkennen: In Abhängigkeit von der Richtung, in der die rationale Funktion gestört wird, kann die Julia-Menge "explodieren" oder sich stetig ändern. (Stetige Veränderung der Julia-Mengen schließt nicht aus, daß sie ihren topologischen Charakter ändern - in der Tat werden die gestörten Julia-Mengen andere topologische Eigenschaften aufweisen.)

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, solche Phänomene zu untersuchen. Zu diesem Zweck studieren wir rationale Funktionen, die von einem (komplexen) Parameter abhängen.

Dabei betrachten wir nicht nur die Julia-Mengen selber, sondern auch die ausgefüllten. Überraschenderweise hängen diese (von wenigen Ausnahmen abgesehen) selbst dann noch stetig von dem Parameter ab, wenn die Julia-Mengen explodieren (Theorem II.5). Die Ausnahmen werden wir exemplarisch an einem Beispiel untersuchen.

Die Arbeit gliedert sich in mehrere Kapitel. In dem ersten werden wir einen Überblick geben über die klassische Theorie sowie über den Stand der Forschungen hinsichtlich der Stabilität der Julia-Mengen; die Stabilität der ausgefüllten Julia-Mengen wurde meines Wissens noch nicht untersucht.

Das zweite Kapitel ist der Stetigkeit der ausgefüllten Julia-Mengen gewidmet. Hier werden wir auch ein Gegenbeispiel von Pierre Lavaurs erläutern, das dieser bei seinen Untersuchungen rational-indifferenten periodischer Punkte fand. Weiterhin werden wir sehen, wie die Resultate zur Stetigkeit der ausgefüllten Julia-Mengen Rückschlüsse auf das Verhalten der Julia-Mengen selber erlauben (§II.4). Am Ende dieses Kapitels wird erläutert, wie diese Aussagen die Motivation liefern für das technisch anmutende vierte Kapitel und für die Voraussetzungen in den Konvergenzaussagen aus §IV.3.

Im dritten Kapitel werden wir uns mit einer Arbeit des Japaners Mitsuhiro Shishikura beschäftigen. Er bewies eine alte Vermutung über die Anzahl der nicht-repulsiven periodischen Zyklen und der Herman-Ringe einer rationalen Funktion. Weil wir sein Ergebnis in einer schärferen Fassung benötigen, können wir leider seinen Beweis nicht einfach übernehmen - wir flechten in seine Argumentation einige zusätzliche Argumente ein. Auf Grund dieser Ergänzungen ist es notwendig, Shishikuras Beweis neu aufzuschreiben. Weiterhin findet der Leser in diesem Kapitel eine Einführung in die quasikonforme Chirurgie. Diese Methode hat sich in der Theorie der holomorphen dynamischen Systeme als äußerst nützlich erwiesen. Weil auch wir sie mehrmals anwenden werden, besprechen wir sie ausführlich. Das Kapitel schließt mit einem Paragraphen über ample Teilmengen freier kritischer Punkte. Pommerenke und Rodin verwendeten in der Theorie der Julia-Mengen als erste den Begriff der amplen Menge kritischer Punkte. Wir greifen diese Idee auf und gewinnen eine weitere

Verschärfung der Ungleichung von Shishikura sowie ein Resultat zur holomorphen Parametrisierung von Siegel-Scheiben.

In dem vierten Kapitel werden wir die Ränder der hyperbolischen Komponenten des Parameterraumes studieren und das Konzept der "lokalen" und "globalen" Attraktoren einführen. Wir werden zwei Ergebnisse erhalten: Einerseits notwendige Bedingungen für die Stetigkeit der Julia-Mengen, andererseits eine Aussage über den Rand der uns interessierenden hyperbolischen Komponenten: Dieser ist fast überall eine stückweise analytische Kurve (Theorem IV.1).

Mit Hilfe dieser Aussage können wir das Hauptergebnis dieser Arbeit, das Theorem IV.5, formulieren. Dieses sagt folgendes aus: Konvergiert in einer solchen Komponente eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht-tangential bezüglich des Randes ∂G von G gegen einen Punkt $\lambda_0 \in \partial G$, der keine Ecke von ∂G ist, so konvergieren die Julia-Mengen zu den Parameterwerten λ_n in der Hausdorff-Metrik gegen die Julia-Menge zu dem Parameterwert λ_0 . Im letzten Paragraphen des Kapitels führen wir diesen Stetigkeitssatz mit Hilfe einiger Ergebnisse aus den vorangehenden Kapiteln auf die Approximation von Siegel-Scheiben (Proposition IV.6) und die von rational indifferenten periodischen Punkten (Proposition IV.7) zurück.

Das fünfte Kapitel ist dem Studium der Approximation von Siegel-Scheiben durch Attraktionsbereiche attraktiver Zyklen gewidmet - wir beweisen hier die Proposition IV.6. Für diese Approximation sind die Bedingungen aus dem vorhergehenden Kapitel notwendig.

In dem letzten Kapitel werden die rational indifferenten periodischen Punkte und ihre Attraktionsbereiche durch attraktive periodische Punkte und deren Attraktionsbereiche approximiert. Wir erhalten als Ergebnis die Proposition IV.7.

An Vorkenntnissen benötigt der Leser den Stoff einer einsemestrigen Vorlesung zur Funktionentheorie, wie er etwa in der Monographie [FL] enthalten ist. An mehreren Stellen werden wir in dieser Arbeit Methoden und Ergebnisse aus anderen Disziplinen der Mathematik verwenden (Ergodentheorie, Komplexe Analysis in mehreren Variablen etc.), aber stets entsprechende Literaturhinweise geben. Spezielle Kenntnisse über holomorphe dynamische Systeme werden nicht erwartet; daß sie das Lesen dieser Arbeit erleichtern, liegt in der Natur der Sache. An dieser Stelle sei auf den Übersichtsartikel [B1] hingewiesen.

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Wolfgang Fischer, sowie Herrn Prof. Dr. Samuel J. Patterson danke ich sehr herzlich für die nette Betreuung. Beide haben mir durch viele Gespräche geholfen. Dank gebührt auch Herrn Dr. F. v. Haeseler und seinen Kollegen vom Institut für Dynamische Systeme der Universität Bremen. Sie haben durch stete Diskussionsbereitschaft zum Gelingen der Arbeit beigetragen.

Unterstützt wurde meine Arbeit durch mehrere Institutionen. Der Sonderforschungsbereich "Geometrie und Analysis" der Universität Göttingen ermöglichte mir einen einjährigen Forschungsaufenthalt am dortigen Mathematischen Institut. Die Studienstiftung des deutschen Volkes gewährte mir für ein Jahr ein Promotionsstipendium. Abgeschlossen habe ich die Arbeit im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik der Universität Bremen. Ich danke herzlich für all diese Unterstützung.



Kapitel I

Überblick über die theoretischen Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir in die Theorie der Julia-Mengen einführen und einen Überblick über bisherige Forschungsarbeiten geben - sofern sie sich mit der Stetigkeit der Julia-Mengen beschäftigen.

Um die Notationen festzulegen, wiederholen wir im ersten Paragraphen die wichtigsten Definitionen. Weiterhin stellen wir hier die klassischen Resultate bereit, die wir in dieser Arbeit benötigen. Die dazugehörenden Beweise findet der interessierte Leser in den Übersichtsartikeln von H. Brolin [Br] und P. Blanchard [Bl] sowie in den Originalarbeiten von G. Julia [J] und P. Fatou [F1-3]. Der zweite Paragraph ist den konformen Konjugationsfunktionen gewidmet; unsere Darstellung lehnt sich an den Artikel von P. Blanchard an, berücksichtigt aber die Resultate von A. D. Brjuno und J. C. Yoccoz. Diese findet man in [Y1] und [Y2]. Der dritte Paragraph beschäftigt sich mit holomorphen Familien rationaler Funktionen; wir erläutern dort das Ergebnis von R. Mañé, P. Sad und D. Sullivan. Hier verweisen wir den am Beweis interessierten Leser auf die Originalarbeit [MSS].

§ 1. Die klassische Theorie

In dieser Arbeit studieren wir Abbildungen des $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf sich. Wir werden gelegentlich verschiedene komplexe Strukturen auf $\bar{\mathbb{C}}$ verwenden. Die (komplexe) Standardstruktur σ_0 wird durch den Atlas definiert, der aus den Karten $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z$ und $\psi : \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{1}{z}$ besteht. $\bar{\mathbb{C}}$ versehen mit dieser komplexen Struktur, also das Paar $(\bar{\mathbb{C}}, \sigma_0)$, ist die Riemannsche Zahlensphäre $\mathbb{P}_1$.

Eine rationale Funktion $R: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; z \mapsto R(z)$ ist der Quotient zweier teilerfremder Polynome P und Q vom Grade $\deg(P)$ bzw. $\deg(Q)$; wir betrachten R dann als eigentliche, holomorphe Abbildung der Riemannschen

Fläche $\mathbb{P}_1$ auf sich (insbesondere ist R in den Polstellen und in dem Punkt ∞ holomorph). Der Abbildungsgrad (im folgenden kurz Grad genannt) $\deg(R)$ einer solchen Funktion ist gerade gleich $\max \{ \deg(P), \deg(Q) \}$.

Wir nehmen in dieser Arbeit stets $\deg(R) \geq 2$ an.

Weil der übliche euklidische Abstand $d_E(\cdot, \cdot)$ auf $\mathbb{C}$ für das Studium unbeschränkter Mengen nicht geeignet ist, weichen wir auf die *chordale Metrik* χ aus. Diese erhält man mittels der stereographischen Projektion von $\mathbb{P}_1$ auf $\mathbb{C}$. Sie ist definiert durch:

$$\text{i.)} \quad \chi(\infty, \infty) = 0,$$

$$\text{ii.)} \quad \chi(\infty, z) = \chi(z, \infty) = 1 / \sqrt{1 + |z|^2} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und}$$

$$\text{iii.)} \quad \chi(z, w) = |z - w| / \sqrt{(1 + |z|^2) \cdot (1 + |w|^2)} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Wie üblich sei für eine Menge $M \subset \mathbb{P}_1$ und einen Punkt $z \in \mathbb{P}_1$

$$\text{iv.)} \quad \chi(z, M) = \chi(M, z) = \inf_{w \in M} \chi(z, w).$$

Wir wollen die Stabilität von Julia-Mengen untersuchen, benötigen also ein Maß für die Distanz zweier Mengen $M, N \subset \mathbb{P}_1$. Dazu benutzen wir die *Hausdorff-Metrik* d :

$$d(M, N) := \inf \{ \varepsilon > 0 : M \subset U_\varepsilon(N) \text{ und } N \subset U_\varepsilon(M) \},$$

dabei sei $U_\varepsilon(M) := \{ z \in \mathbb{P}_1 : \chi(z, M) < \varepsilon \}$. Existiert für eine beliebige Folge abgeschlossener Mengen $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Grenzwert bezüglich der Hausdorff-Metrik, so ist er gleich der Menge N aller Häufungspunkte aller Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \in M_n$. Falls eine Menge N mit den folgenden zwei Eigenschaften existiert, so existiert auch der Grenzwert und ist gleich N :

i.) Zu jeder im Komplement $CN := \mathbb{P}_1 \setminus N$ relativ kompakten Menge U existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $U \cap M_n = \emptyset$ für alle $n \geq n_0$.

ii.) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $N \subset U_\varepsilon(M_n)$ für alle $n \geq n_0$.

P. Fatou studierte für eine rationale Funktion R vom Grade $d := \deg(R) \geq 2$ die Menge F_R der Punkte $z \in \mathbb{P}_1$, zu denen es eine Umgebung $U(z)$ gibt so, daß die Iterierten R^n von R eingeschränkt auf $U(z)$ eine normale Familie bilden. Dabei ist R^0 die Identität und $R^n(z) = (R \circ R^{n-1})(z)$.

Definition 1.1 Die Menge F_R heißt Fatou-Menge der rationalen Funktion R .

G. Julia wählte dagegen einen anderen Zugang, er betrachtete die (repulsiven) periodischen Punkte.

Definition 1.2 Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{P}_1$ heißt periodischer Punkt der Ordnung n der Funktion R (für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$), falls z_0 eine Lösung der Gleichung $R^n(z) = z$ ist, aber für $v = 1, \dots, n-1$ die Gleichung $R^v(z) = z$ nicht löst. Die Menge $Z := \{z_0, R(z_0), \dots, R^{n-1}(z_0)\}$ nennt man Zyklus der Ordnung n von R , im Fall $Z \subset \mathbb{C}$ heißt die Zahl $m = (R^n)'(z_0) = \prod_{v=0}^{n-1} R'(R^v(z_0))$ Multiplikator von Z .

Periodische Punkte der Ordnung $n=1$ sind Fixpunkte. Existiert zu einem Punkt z_0 eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ so, daß $R^n(z_0)$ ein periodischer Punkt ist, so nennen wir z_0 präperiodisch.

Die periodischen Punkte von R werden in drei Klassen eingeteilt, man benötigt dazu die Ableitung von R^n in dem Punkt z_0 (Nach Koordinatentransformation können wir o. B. d. A. annehmen, daß $z_0 \in \mathbb{C}$ und für $v = 1, \dots, n$ kein Pol von R^v ist).

Definition I.3 Falls z_0 ein periodischer Punkt der Ordnung n ist und $|(R^n)'(z_0)| < 1$ gilt, so heißt z_0 ein attraktiver periodischer Punkt. Gilt sogar $(R^n)'(z_0) = 0$, so nennt man z_0 einen superattraktiven periodischen Punkt. Ist dagegen $|(R^n)'(z_0)| > 1$, so heißt z_0 repulsiver periodischer Punkt. In dem Fall $|(R^n)'(z_0)| = 1$ nennen wir z_0 einen indifferenten periodischen Punkt und schreiben $(R^n)'(z_0) = \exp(2\pi i \cdot \alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Falls $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist, so heißt z_0 rational indifferenter periodischer Punkt, anderenfalls irrational indifferenter periodischer Punkt.

Analog zu dieser Einteilung sprechen wir von attraktiven, repulsiven und indifferenten Zyklen. Julia betrachtete den Abschluß der Menge aller repulsiven periodischen Punkte, ihn bezeichnen wir mit J_R :

Definition I.4 Die Menge J_R heißt Julia-Menge der rationalen Funktion R .

Man kann zeigen, daß die Julia-Menge gerade das Komplement der Fatou-Menge ist: $J_R = \mathbb{C} \setminus F_R$. Wir fassen einige Eigenschaften dieser Menge zusammen.

Theorem I.1 (s. [Br], §§ I.2 und I.3) Für die Julia-Menge J_R einer beliebigen rationalen Funktion R gilt:

- i.) J_R ist nicht leer.
- ii.) J_R ist abgeschlossen.
- iii.) J_R ist vorwärts und rückwärts invariant, d. h. es gilt

$$R(J_R) = J_R \quad \text{und} \quad R^{-1}(J_R) = J_R.$$
- iv.) Ersetzt man R durch eine beliebige Iterierte R^n , so ändert sich die Julia-Menge nicht: $J_R = J_{R^n}$.
- v.) Es gilt stets $J_R = \mathbb{C} \setminus F_R$.

Dabei ist $R^{-1}(J_R)$ die Menge aller R -Urbilder aller Punkte aus J_R . Die Aussagen iii.) und iv.) gelten auch für die Fatou-Menge F_R , dieses folgt sofort aus der bereits oben erwähnten Eigenschaft v.).

Weder J_R noch F_R sind in der Regel zusammenhängend. F_R zerfällt i. A. in abzählbar unendlich viele Komponenten; hier und im folgenden bedeutet Komponente stets Wegzusammenhangskomponente. Von Interesse sind aber meistens nur endlich viele. Dieses ist eine Konsequenz aus dem folgenden Ergebnis von D. Sullivan: Er bewies 1982 in [SI] die alte, zuerst von P. Fatou geäußerte Vermutung, daß jede Komponente von F_R präperiodisch ist. Der am Beweis interessierte Leser sei an dieser Stelle auf die Arbeit [Be] von L. Bers hingewiesen.

Theorem I.2 (Sullivans Präperiodizitätstheorem) *Zu jeder Komponente G von F_R existieren Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, mit $R^n(R^m(G)) = R^m(G)$.*

An dieser Stelle soll angemerkt werden, daß das Bild einer Komponente der Fatou-Menge stets wieder eine Komponente der Fatou-Menge ist. Diese Tatsache folgt aus den Aussagen iii.) und v.) von Theorem I.1.

Proposition I.3 *Ist G eine Komponente von F_R , so auch $R(G)$. Weiterhin ist $R^{-1}(G)$ eine Vereinigung von endlich vielen Komponenten von F_R .*

Sullivan hat in [SIII] die periodischen Komponenten klassifiziert. Genauer gesagt: Er bewies, daß es außer den schon Fatou und Julia bekannten vier Typen keine weiteren gibt. Bekannt ist, daß die Fatou-Menge höchstens endlich viele periodische Komponenten besitzt (s. [SIII], p.6). Weil sich die Julia-Menge nicht ändert, wenn wir die Funktion R durch eine hinreichend hohe Iterierte R^m ersetzen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß jede periodische Komponente invariant unter R ist.

Theorem I.4 (Sullivans Klassifikationstheorem) Ist G eine invariante Komponente von $F_{\mathbb{R}}$, so gehört G zu einer der folgenden vier Klassen:

- i.) G enthält genau einen attraktiven Fixpunkt z_0 .
- ii.) Es existiert ein rational indifferenter Fixpunkt $z_0 \in \partial G$ und auf G konvergieren die Iterierten von R gegen $g \equiv z_0$.
- iii.) G enthält einen irrational indifferenten Fixpunkt z_0 . In diesem Fall ist G einfach zusammenhängend und es existiert eine konforme Abbildung Ψ von der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ auf G so, daß auf $\mathbb{D}$ $(R \circ \Psi)(z) = \Psi(a \cdot z)$ für $a := R'(z_0) \in \partial \mathbb{D}$ gilt.
- iv.) G ist zweifach zusammenhängend und es existiert eine konforme Abbildung Ψ von einem offenen Kreisring K auf G so, daß auf K $(R \circ \Psi)(z) = \Psi(a \cdot z)$ für eine Zahl a mit $|a| = 1$ gilt.

Die periodischen Komponenten werden analog klassifiziert. Wir beschreiben diese vier Klassen noch genauer.

Im ersten Fall heißt G auch sofortiger Attraktionsbereich des Fixpunktes z_0 , wir bezeichnen ihn mit $A^*(z_0)$. Die Vereinigung $A(z_0) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^{-n}(G)$ heißt Attraktionsbereich von z_0 ; auch auf $A(z_0)$ gilt $R^n \rightarrow g \equiv z_0$ lokal gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$. $A(z_0)$ ist vollständig, $A^*(z_0)$ nur vorwärts invariant.

Im zweiten Fall liegt z_0 im Rand ∂G von G , und auf G gilt $R^n \rightarrow g \equiv z_0$ lokal gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$. Die Vereinigung aller periodischen Komponenten von $F_{\mathbb{R}}$ mit diesen Eigenschaften ist der sofortige Attraktionsbereich dieses rational indifferenten Fixpunktes, die Vereinigung aller Urbilder hiervon bildet den Attraktionsbereich von z_0 . Auch diese Attraktionsbereiche bezeichnen wir mit $A^*(z_0)$ bzw. $A(z_0)$. Die (sofortigen) Attraktionsbereiche attraktiver oder rational indifferenter Zyklen definieren wir analog. Falls aus dem Kontext nicht deutlich wird, zu welcher Funktion diese Attraktionsbereiche gehören, so fügen wir diesen Bezeichnungen entsprechende Indizes hinzu.

Im dritten Fall heißt G Siegel-Scheibe von R mit Zentrum z_0 . Im vierten Fall heißt G Herman-Ring von R , auch hier ist a von der Form $a = \exp(2\pi i \cdot \alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wichtig ist das

Theorem I.5 (s. [Br], Theoreme I.3.1 und I.3.2)

- i.) *Der sofortige Attraktionsbereich eines attraktiven oder eines rational indifferenten Zyklus enthält stets einen kritischen Punkt und einen kritischen Wert.*
- ii.) *Der Rand des Attraktionsbereiches eines attraktiven oder eines rational indifferenten periodischen Zyklus ist stets gleich der Julia-Menge.*

Dabei ist ein kritischer Wert ein Punkt $w \in \mathbb{P}_1$ so, daß die Gleichung $R(z) = w$ eine mehrfache Lösung besitzt, eine solche Lösung heißt kritischer Punkt von R . Weil R höchstens $2d-2$ kritische Punkte besitzt, kann nach Theorem I.5 die Funktion R höchstens $2d-2$ attraktive oder rational indifferente periodische Punkte besitzen. Diese Abschätzung wurde von Shishikura verbessert, wir kommen hierauf später zurück.

Ist G eine invariante Komponente des Attraktionsbereiches eines rational indifferenten periodischen Punktes, so gilt für $z \in G$ stets $\lim_{n \rightarrow \infty} R^n(z) \in \partial G$. Also kann kein Punkt aus G präperiodisch sein. Es folgt das

Lemma I.6 *Der sofortige Attraktionsbereich eines rational indifferenten periodischen Punktes enthält stets einen kritischen Wert, der nicht präperiodisch ist.*

Von allgemeinen Interesse ist die *Selbstähnlichkeit* der Julia-Mengen. Selbstähnlichkeit bedeutet, daß eine Julia-Menge im Kleinen so aussieht wie im Großen. Die präzise Beschreibung dieses Sachverhaltes ist der Inhalt der

Proposition 1.7 (s. [Br], Theorem 1.4.2) *Es sei z ein Punkt aus der Julia-Menge einer rationalen Funktion R und U eine offene Umgebung von z . Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $J = \bigcup_{v=0}^n R^v(J \cap U)$.*

§ 2. Konforme Konjugationen

Für das Studium der Dynamik von R in der Nähe eines periodischen Punktes z_0 ist es von großem Vorteil, daß sich R dort fast immer linearisieren läßt. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß z_0 ein Fixpunkt ist: $R(z_0) = z_0$, und setzen $w := R'(z_0)$.

Wir interessieren uns für eine Lösung Ψ der *Schröderschen Funktionalgleichung* $(R \circ \Psi)(z) = \Psi(w \cdot z)$ mit $\Psi(0) = z_0$ und $\Psi'(0) = 1$. Potenzreihenansatz liefert außer in dem Fall $w = \exp(2\pi i \cdot \alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}$ für Ψ stets eine formale Potenzreihe, diese konvergiert aber nicht immer. In dem Fall $\alpha \in \mathbb{Q}$ sind mehrere Koeffizienten dieser Reihe nicht definiert (Division durch Null).

Definition 1.5 *Ist der Konvergenzradius der Potenzreihe zu Ψ größer als Null, so nennen wir Ψ eine konforme Konjugation.*

Einige hinreichende Bedingungen dafür, daß der Konvergenzradius positiv ist, enthält das

Theorem I.8 Die formale Potenzreihe zu Ψ konvergiert in folgenden drei Fällen:

- i.) Für $0 \neq |w| \neq 1$ besitzt die formale Potenzreihe zu Ψ einen Konvergenzradius $r > 0$.
- ii.) Für $0 < |w| < 1$ ist Ψ eine biholomorphe Abbildung von D_r auf eine Umgebung $U \subset \subset F_R$ von z_0 (dabei sei r der nach i.) positive Konvergenzradius). Der Rand ∂U von U ist eine stückweise analytische Kurve. Die Ecken sind genau die kritischen Punkte von R , die in $\bar{U}$ liegen, und ∂U enthält immer mindestens einen kritischen Punkt.
- iii.) Für $w = \exp(2\pi i \cdot \alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sei $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Kettenbruchentwicklung von α . Die formale Potenzreihe Ψ besitzt einen positiven Konvergenzradius r , falls die Summe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log q_{n+1}}{q_n}$ konvergiert. Das Bild $U := \Psi(D_r)$ ist dann eine Siegel-Scheibe von R mit dem Zentrum z_0 .

Die zahlentheoretische Bedingung aus iii.) ist hinreichend für die Existenz einer Siegel-Scheibe. Unklar ist zur Zeit, ob sie auch notwendig ist. Die Arbeiten von J.-C. Yoccoz (s.u.) lassen dieses allerdings vermuten. In jedem Fall aber ist, falls Ψ einen Konvergenzradius $r > 0$ besitzt, das Bild des Konvergenzbereiches eine Siegel-Scheibe mit $\Psi(0)$ als Zentrum. Falls die formale Potenzreihe von Ψ in keiner Umgebung der Null konvergiert, so heißt der irrational indifferente Fixpunkt z_0 nicht-linearisierbar. Die Menge dieser α hat das Lebesgue-Maß Null, liegt aber dicht in $\mathbb{R}$! Weil wir diese Tatsache später noch benötigen, zitieren wir das entsprechende Ergebnis von H. Cremer [Cr]:

Theorem I.9 Die Menge der $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, für die jede auf einer Umgebung der Null holomorphe Funktion f mit $f'(0) = \exp(2\pi i \alpha)$ im Nullpunkt nicht linearisierbar ist, liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Die Aussage i.) von Theorem I.8 wurde zuerst von Koenigs im 19. Jahrhundert bewiesen, man findet den Beweis u. a. in [SM]. Die zweite Aussage ist ebenfalls klassisch, ein Beweis ist in [vHP], §6.2 enthalten. Die Aussage iii.) stammt von Siegel [Si]. Falls α die zahlentheoretische Bedingung erfüllt, so sagt man auch, daß α die *Brjuno-Bedingung* erfüllt. Yoccoz bewies in [Y2], daß für festes α genau dann jede in $\mathbb{D}$ injektive holomorphe Funktion f mit $f'(0) = \exp(2\pi i \alpha)$ im Nullpunkt linearisierbar ist, wenn α die Brjuno-Bedingung erfüllt.

Ist $a = \exp(2\pi i \cdot \alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{Q}$, so existiert nahe z_0 immerhin noch eine topologische Konjugation zu $z \mapsto a \cdot z \cdot (1+z^k)$ mit einem geeigneten $k \geq 1$ - da wir diese Tatsache im folgenden nicht benötigen, sei der interessierte Leser auf die ausführliche Darstellungen in [Bl] und [DH2] oder auf den Originalbeweis von C. Camacho [Ca] verwiesen.

Bevor wir uns dem Fall $w=0$ zuwenden, wollen wir noch eine Folgerung aus der zweiten Aussage des Theorems ziehen. ∂U enthält stets einen kritischen Punkt c , somit enthält U den kritischen Wert $R(c)$. Dieser kann nicht präperiodisch sein, denn es gilt einerseits $R(U \setminus \{0\}) \subset U \setminus \{0\}$ und andererseits $R^n \rightarrow g \equiv 0$ auf U . Wir erhalten also zusammen mit dem Lemma I.6 folgende Verschärfung von Theorem I.5:

Theorem I.5' *Der sofortige Attraktionsbereich eines attraktiven, aber nicht superattraktiven periodischen Punktes oder eines rational indifferenten periodischen Punktes enthält stets einen nicht-präperiodischen kritischen Wert und einen nicht-präperiodischen kritischen Punkt.*

Wir benötigen noch das Resultat für den Fall $w=0$. Dazu nehmen wir o. B. d. A. an, daß $z_0=0$ gilt und die Potenzreihe von R um 0 von der Form

$$R(z) = z^m + \text{höhere Terme}$$

ist. Dann gilt das

Theorem I.10 (s. [Bl], Theorem 3.4) *Es existiert ein $r > 0$ sowie eine biholomorphe Funktion $\Psi: D_r \rightarrow \Psi(D_r)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- i.) $(R \circ \Psi)(z) = \Psi(z^m)$ auf D_r mit $\Psi(0) = 0$ und $\Psi'(0) = 1$.
- ii.) *Ist $\Psi(D_r)$ eine Komponente von F_R (also $\Psi(D_r) = A^*(z_0)$), so gilt $r = 1$ und $\{ |z| < \frac{1}{4} \} \subset \Psi(D_r)$.*
- iii.) *Ist $U := \Psi(D_r) \subset \subset F_R$, so gilt $0 < r < 1$ und ∂U ist eine stückweise analytische Kurve. Die Ecken sind genau die kritischen Punkte von R , die in $\bar{U}$ liegen und $\bar{U}$ enthält mindestens einen solchen Punkt.*

Auch in diesem Fall nennen wir Ψ eine konforme Konjugation. Die Existenz der konformen Abbildung Ψ wurde 1905 von Boettcher in [Bo] bewiesen.

§ 3. Holomorphe Familien rationaler Funktionen

Wir studieren nun rationale Funktionen, die holomorph von einem komplexen Parameter abhängen. Dazu benötigen wir den Begriff der holomorphen Familie:

Definition 1.6 *Es sei M ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Unter einer holomorphen Familie rationaler Funktion wollen wir eine Funktion $\mathcal{R}: M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; (\lambda, z) \mapsto \mathcal{R}(\lambda, z)$ verstehen mit folgenden Eigenschaften:*

- i.) $\mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ ist für alle $\lambda \in M$ eine rationale Funktion vom festen Grade $d := \deg \mathcal{R}(\lambda, \cdot) \geq 2$.
- ii.) Für festes $z \in \mathbb{P}_1$ ist die Funktion $\mathcal{R}(\cdot, z)$ meromorph auf M .

Mit anderen Worten: $\mathcal{R}$ ist eine rationale Funktion mit Koeffizienten aus dem Raum $\mathcal{O}(M)$ aller auf M holomorphen Funktionen: $\mathcal{R} \in \mathcal{O}(M)(z)$.

Entsprechend ist eine holomorphe Familie $\mathcal{P}$ von Polynomen ein Polynom mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}(M)$: $\mathcal{P} \in \mathcal{O}(M)[z]$.

Wir werden in der Regel R_λ statt $\mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ schreiben sowie $\mathcal{R}^0(\lambda, \cdot)$

für die n -te Iterierte von $\mathcal{R}(\lambda, \cdot)$. Heute spielt das folgende Theorem in der Theorie der Julia-Mengen eine beherrschende Rolle:

Theorem I.11 (Mañé, Sad, Sullivan, [MSS]) *Zu jeder holomorphen Familie rationaler Funktionen $\mathcal{R}: M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; (\lambda, z) \mapsto R_\lambda(z)$ existiert eine offene, in M dicht liegende Teilmenge M_1 so, daß gilt:*

Zu jedem $\lambda_0 \in M_1$ gibt es eine offene Umgebung U in M_1 sowie eine stetige Funktion $\Phi: U \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ mit:

- i.) $\Phi(\lambda_0, \cdot) \equiv \text{id}$.
- ii.) *Für jedes $\lambda \in U$ bildet $\Phi(\lambda, \cdot)$ die Julia-Menge J_{λ_0} homöomorph auf J_λ ab und ebenso F_{λ_0} auf F_λ .*
- iii.) *Für festes $z \in J_{\lambda_0}$ ist die Funktion $\lambda \mapsto \Phi(\lambda, z)$ holomorph bzw. meromorph auf U .*
- iv.) *Für jedes $\lambda \in U$ ist $\Phi(\lambda, \cdot)$ eine quasikonforme Abbildung mit beschränktem Dilationskoeffizienten.*

Mañé, Sad und Sullivan zeigten in ihrer Arbeit [MSS], daß die im Theorem genannte Umgebung U stets Teilmenge der Komponente G von M_1 ist, die λ_0 enthält, und daß man $U = G$ wählen kann. Die Funktion $\kappa: U \rightarrow \mathbb{R}; \lambda \mapsto \inf\{K > 0: \Phi(\lambda, \cdot) \text{ ist } K\text{-quasikonform}\}$ ist wohldefiniert. Sie ist in der Regel unbeschränkt, wenn $\partial U \cap \partial G \neq \emptyset$ gilt. Wir nehmen jetzt $U = G$ an. Später untersuchen wir das folgende Problem: Zu einem $\lambda \in \partial U$ wählen wir eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U mit $\lambda_n \rightarrow \lambda$ für $n \rightarrow \infty$ und fragen uns, ob dann auch $J_{\lambda_n} \rightarrow J_\lambda$ folgt. Es wäre sehr angenehm, wenn wir die Folge der quasikonformen Abbildungen $\Phi(\lambda_n, \cdot)$ studieren könnten. Wie wir aber im vierten Kapitel sehen werden, kann die Folge $\{\kappa(\lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ selbst dann unbeschränkt sein, wenn $J_{\lambda_n} \rightarrow J_\lambda$ gilt. Daher können wir die bekannten Konvergenzsätze über Folgen quasikonformer Abbildungen (s. z.B. [Le], § I.2) **nicht** anwenden.

Eng verwandt mit der Menge M_1 ist die Menge M_2 der Parameterwerte λ , für die J_λ hyperbolisch ist.

Definition 1.7 Wir sagen, daß R_λ bzw. J_λ die expanding property besitzt oder hyperbolisch ist, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- i.) Jeder kritische Punkt von R_λ liegt im Einzugsbereich eines attraktiven periodischen Punktes von R_λ .
- ii.) Es existieren Zahlen $m \in \mathbb{N}$ und $c > 1$ mit $|(R_\lambda^n)'(z)| \geq c$ für alle $n \geq m$ und alle $z \in J_\lambda$.

M_2 ist eine offene Teilmenge von M , liegt aber oft nicht dicht in M . Die Komponenten von M_2 heißen hyperbolische Komponenten. Ist G eine solche Komponente, so existiert eine Teilmenge $S \subset G$ so, daß $G \setminus S$ eine Komponente von M_1 ist und zugleich offen und dicht in G liegt. In [MSS] wurden die Elemente von S charakterisiert. Es gibt für ein $\lambda_0 \in S$ zwei Möglichkeiten:

- 1.) Es existiert in M_2 eine offene Umgebung U von λ_0 sowie auf U stetige Funktionen a und c mit
 - i.) $a(\lambda) \neq c(\lambda)$ für $\lambda \neq \lambda_0$ und $\lambda \in U$ sowie $a(\lambda_0) = c(\lambda_0)$,
 - ii.) $a(\lambda)$ ist für alle $\lambda \in U$ ein attraktiver periodischer Punkt von R_λ ,
 - iii.) $c(\lambda)$ ist für alle $\lambda \in U$ ein kritischer Punkt von R_λ .
- 2.) Es existiert eine offene Umgebung U von λ_0 in M_2 sowie auf U stetige Funktionen c_1 und c_2 und Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit:
 - i.) $R_\lambda^{n_1}(c_1(\lambda)) \neq R_\lambda^{n_2}(c_2(\lambda))$ für $\lambda \neq \lambda_0$ und $\lambda \in G$ sowie $R_{\lambda_0}^{n_1}(c_1(\lambda_0)) = R_{\lambda_0}^{n_2}(c_2(\lambda_0))$.
 - ii.) $c_1(\lambda)$ und $c_2(\lambda)$ sind für alle $\lambda \in U$ kritische Punkte von R_λ .

Anders formuliert: Die erste Möglichkeit bedeutet für einen Punkt aus S , daß dort ein attraktiver periodischer Punkt und ein kritischer Punkt, die sonst getrennt sind, zusammenfallen; dabei entsteht ein superattraktiver periodischer Punkt. Die zweite Möglichkeit bedeutet, daß die Orbitrelationen der kritischen Punkte sich verändern.

Ein wichtiges Hilfsmittel in dieser Arbeit ist die Parametrisierung der Fixpunkte. Ein Fixpunkt z_0 von R_{λ_0} ist eine Lösung der Gleichung $\mathcal{R}(\lambda_0, z) - z = 0$. In dem Fall $\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{R}(\lambda_0, z_0) \neq 1$ können wir den Satz über implizite Funktionen anwenden (s. [Ra], Theorem I.2.4). Dieser liefert auf einer geeigneten, in M offenen Umgebung U von λ_0 eine holomorphe Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{P}_1$ mit $\mathcal{R}(\lambda, g(\lambda)) = g(\lambda)$ und $g(\lambda_0) = z_0$. Wir nehmen o.B.d.A. $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ an und schreiben $T_\lambda: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$; $z \mapsto z - g(\lambda)$. Dann besitzt die Funktion $(\lambda, z) \mapsto (T_\lambda \circ \mathcal{R})(\lambda, T_\lambda^{-1}(z))$ für $\lambda \in U$ und z nahe dem Nullpunkt eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$(1) \quad (\lambda, z) \mapsto a_1(\lambda)z + a_2(\lambda)z^2 + \dots$$

mit holomorphen Funktionen $a_\nu: U \rightarrow \mathbb{C}$. Wir ersetzen nun M durch U , z_0 durch 0 und $\mathcal{R}(\lambda, z)$ durch $(T_\lambda \circ \mathcal{R})(\lambda, T_\lambda^{-1}(z))$. Dann besitzt also $\mathcal{R}$ für alle $\lambda \in M$ in der Nähe des Fixpunktes z_0 eine Darstellung der Form (1). Im folgenden werden wir diesen Vorgang umschreiben mit den Worten: "Nach Koordinatentransformation können wir annehmen, daß $\mathcal{R}$ eine Potenzreihenentwicklung der Form (1) besitzt".

Falls a_1 injektiv ist, definieren wir $S: U \rightarrow \mathbb{P}_1$; $\lambda \mapsto a_1^{-1}(\lambda)$ und $V := a_1(U)$. Wir ersetzen nun M durch V , λ_0 durch $a_1(\lambda_0)$ und $\mathcal{R}$ durch die Funktion $\mathcal{R}(S(\lambda), z)$. Dann besitzt $\mathcal{R}$ für $\lambda \in V$ und z nahe z_0 eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$(2) \quad (\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot z + b_2(\lambda)z^2 + \dots$$

mit holomorphen Funktionen $b_\nu: V \rightarrow \mathbb{C}$. Diesen Vorgang werden wir

zukünftig umschreiben durch "Nach Koordinatentransformation und Umparametrisieren können wir annehmen, daß $\mathcal{R}$ eine Darstellung der Form (2) besitzt". Diese Darstellung hat den Vorteil, daß wir jetzt die Parameterwerte angeben können, für die der Fixpunkt z_0 attraktiv (bzw. indifferent oder repulsiv) ist: Für $\lambda \in \mathbb{D} \cap V$ ist z_0 attraktiv, für $\lambda \in \partial \mathbb{D} \cap V$ indifferent und für $\lambda \in V \setminus \overline{\mathbb{D}}$ repulsiv.

Ist z_0 ein periodischer Punkt der Ordnung $n \geq 2$, so ist g implizit definiert durch die Gleichung $\mathcal{R}^n(\lambda, z) - z = 0$. Nach Koordinatentransformation ist dann z_0 für alle λ ein periodischer Punkt der Ordnung n . Die Elemente des Zyklus $Z_\lambda = \{z_0, \mathcal{R}(\lambda, z_0), \dots, \mathcal{R}^n(\lambda, z_0)\}$ sind holomorphe Funktionen von M nach $\mathbb{P}_1$. Falls die Abbildung $\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{R}^n(\lambda, z_0)$ injektiv ist, können wir nach Koordinatentransformation und Umparametrisieren $\lambda = \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{R}^n(\lambda, z_0)$ für alle $\lambda \in M$ annehmen.

Kapitel II

Stabilität ausgefüllter Julia-Mengen

Die ausgefüllten Julia-Mengen wurden zuerst von A. Douady und J. H. Hubbard untersucht, u. a. in ihrer Arbeit [DH1] über polynomial-like mappings. Im ersten Paragraphen werden wir die Stabilität der ausgefüllten Julia-Mengen von Polynomen studieren. In dem zweiten Paragraphen werden wir die Definition der ausgefüllten Julia-Menge für beliebige rationale Funktionen vorstellen und zeigen, daß das Resultat des ersten Paragraphen auch in dieser neuen Situation gültig bleibt. Der dritte Paragraph ist einem Beispiel, das P. Lavaurs untersucht hat, gewidmet. Das Ergebnis wird sein, daß die ausgefüllte Julia-Menge genau dann stabil ist, wenn die zugehörige rationale Funktion keinen rational indifferenten periodischen Punkt besitzt. In dem letzten Paragraphen werden wir die Resultate der ersten zwei Paragraphen verwenden, um a-priori-Aussagen über die Stetigkeit der Julia-Mengen herzuleiten.

§1. Stetigkeit ausgefüllter Julia-Mengen von Polynomen

In diesem Paragraphen sei $\mathcal{P} : M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1 ; (\lambda, z) \mapsto P_\lambda(z)$ eine holomorphe Familie von Polynomen vom festen Grade $d \geq 2$. Dann ist (s. [Br], Theorem 11.1) für jedes $\lambda \in M$ der Punkt ∞ ein (super-) attraktiver Fixpunkt von P_λ und der Attraktionsbereich

$$A_\lambda := A_\lambda(\infty) = \{ z \in \mathbb{P}_1 : \lim_{n \rightarrow \infty} P_\lambda^n(z) = \infty \}$$

ist eine offene und zusammenhängende Umgebung von ∞ . Das Komplement ist gerade die ausgefüllte Julia-Menge:

Definition II.1 Für ein beliebiges Polynom $f : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ vom Grade $d \geq 2$ ist die ausgefüllte Julia-Menge K_f die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die die Folge $\{f^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Zur Vereinfachung schreiben wir $P := P_\lambda$, $J := J_\lambda$, $F := F_\lambda$, $K := K_\lambda$ und $A := A_\lambda$. Die Definition besagt also $CK = A$. Mit Theorem I.5 ii.) folgt $\partial K = J$. K ist abgeschlossen, weil A eine offene Menge ist. Somit gilt die

Proposition II.1 *Eine ausgefüllte Julia-Menge K ist stets abgeschlossen und es gilt $CK = A$, $\partial K = \partial A = J$.*

Wir fixieren eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda \in M$. Wir schreiben $P_n := P_{\lambda_n}$, $J_n := J_{\lambda_n}$, $F_n := F_{\lambda_n}$, $K_{\lambda_n} := K_n$ und $A_n := A_{\lambda_n}$. Wieder haben wir $CK_n = A_n$ und $J_n = \partial K_n = \partial A_n$. Wir können nun das Hauptergebnis dieses Paragraphen formulieren:

Proposition II.2 *Falls P keinen rational indifferenten periodischen Punkt besitzt, so gilt bezüglich der Hausdorff-Metrik $K_n \rightarrow K$ für $n \rightarrow \infty$.*

Der erste Beweisschritt basiert auf dem folgenden Lemma. Weil wir es aber in dieser Arbeit noch an vielen anderen Stellen benötigen werden, wollen wir es nicht in dem Beweis der Proposition verstecken, sondern ihm voranstellen:

Lemma II.3 (Hauptlemma) *Es sei $\mathcal{R}: M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ eine holomorphe Familie rationaler Funktionen und $\lambda \in M$. Weiterhin sei Z_λ ein attraktiver Zyklus von R_λ und U eine (nicht notwendig zusammenhängende) Umgebung von Z_λ , die relativ kompakt in dem Attraktionsbereich $A(Z_\lambda)$ liegt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, daß für $\mu \in M$ und $|\lambda - \mu| < \varepsilon$ gilt*

- i.) R_μ besitzt einen attraktiven Zyklus $Z_\mu \subset U$.
- ii.) U liegt relativ kompakt in dem Attraktionsbereich $A(Z_\mu)$.

Beweis des Hauptlemmas: a.) Wir nehmen zunächst an, daß Z aus einem Element besteht: $Z_\lambda = \{\tilde{a}(\lambda)\}$ mit $\tilde{a}(\lambda) \neq \infty$. Dann ist $\tilde{a}(\lambda)$ ein attraktiver Fixpunkt von R_λ ; diesen können wir (wie in §1.3 beschrieben) mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen parametrisieren: Es existiert eine in M offene Umgebung W von λ sowie eine Funktion $a \in \mathcal{O}(W)$ mit folgenden Eigenschaften:

- i.) $a(\mu)$ ist für alle $\mu \in W$ ein attraktiver Fixpunkt von R_μ und
- ii.) $a(\lambda) = \tilde{a}(\lambda)$.

Für den Attraktionsbereich von $a(\mu)$ schreiben wir $A(\mu)$ und $A^*(\mu)$ für den sofortigen Attraktionsbereich von $a(\mu)$. Aus der Holomorphie der Funktion $\mathcal{R}$ folgt die der Funktion $m: W \rightarrow \mathbb{C}; \mu \mapsto (R_\mu)'(a(\mu))$; wegen der Eigenschaft i.) gilt sogar $m: W \rightarrow \mathbb{D}$. Weiterhin finden wir eine Umgebung $V \subset A^*(\lambda)$ von $a(\lambda)$ und eine Funktion $\Phi \in \mathcal{O}(W \times V)$ so, daß für alle $(\mu, z) \in W \times V$

$$R_\mu(z) = a(\mu) + m(\mu) \cdot (z - a(\mu)) + (z - a(\mu))^2 \cdot \Phi(\mu, z)$$

gilt. Wählen wir V und W hinreichend klein, so können wir für $(\mu, z) \in W \times V$

$$|(z - a(\mu)) \cdot \Phi(\mu, z)| \leq \frac{1}{2}(1 - |m(\mu)|)$$

annehmen. Es existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $D_{\varepsilon_0}(\lambda) \subset W$. Wir erhalten

$$(1) \quad (\mu, z) \in D_{\varepsilon_0}(\lambda) \times V \Rightarrow |R_\mu(z) - a(\mu)| \leq |z - a(\mu)| \Rightarrow z \in A_\mu.$$

Nun gibt es ein $\delta > 0$ mit $D_{2\delta}(a(\lambda)) \subset V$. Wegen $U \subset A(\lambda)$ finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_\lambda^n(U) \subset D_\delta(a(\lambda))$. Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{R}$ können wir ein $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ so wählen, daß für $|\mu - \lambda| < \varepsilon$

$$\sup_{z \in U} |R_\mu^n(z) - R_\lambda^n(z)| \leq \delta$$

gilt; mit (1) erhalten wir:

$$\mu \in D_\varepsilon(\lambda) \Rightarrow R_\mu^n(U) \subset V \subset A_\mu.$$

b.) Wir untersuchen nun den Fall, daß Z aus mehreren Elementen besteht: $Z = \{ \tilde{a}_1(\lambda), \dots, \tilde{a}_m(\lambda) \}$ mit einem $m \geq 2$. Jedes $\tilde{a}_v(\lambda)$ ist ein attraktiver Fixpunkt von R_λ^m mit dem Attraktionsbereich $A(\tilde{a}_v(\lambda))$. Wir ersetzen dann die rationalen Funktionen R_μ durch ihre m -ten Iterierten und zerlegen $U = U_1 \cup \dots \cup U_m$ mit $U_v = U \cap A(\tilde{a}_v(\lambda))$ für $v = 1, \dots, m$. Jeden der Fixpunkte $\tilde{a}_v$ parametrisieren wir wieder, erhalten also holomorphe Funktionen $a_v \in \mathcal{O}(W)$. Für jedes $\mu \in W$ ist $a_v(\mu)$ ein attraktiver Fixpunkt von R_μ , wir bezeichnen seinen Attraktionsbereich mit $A(a_v(\mu))$. Auf jedes einzelne U_v können wir Schritt a.) anwenden und erhalten ein $\varepsilon_v > 0$ mit

$$|\lambda - \mu| \leq \varepsilon_v \Rightarrow U \subset A(a_v(\mu)).$$

Dann leistet $\varepsilon := \min \{ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \}$ das gewünschte. $\square$

Beweis der Proposition II.2: Wir müssen einerseits zeigen, daß zu jeder in $CK = A$ (relativ) kompakten Menge B ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $B \cap K_n = \emptyset$ für alle $n \geq n_0$, und andererseits, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $K \subset U_\varepsilon(K_n)$ für alle $n \geq n_0$.

a.) Zu jeder in A kompakten Menge B existiert nach Lemma II.3 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $B \subset A_n$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt $B \cap K_n = \emptyset$ für alle $n \geq n_0$.

b.) Der zweite Teil des Beweises ist leider etwas länger. Wir zeigen zunächst das

Lemma II.4 *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $J \subset U_\varepsilon(J_n) \subset U_\varepsilon(K_n)$ für alle $n \geq n_0$.*

Nach Definition I.4 liegen die repulsiven periodischen Punkte von P dicht in J . Ein derartiger Punkt z_0 kann mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen parametrisiert werden, d.h. es existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein repulsiver periodischer Punkt z_n von P_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$. Wieder mit Definition I.4 folgt $z_n \in J_n$. Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_0 \in U_\varepsilon(J_n)$ für $n \geq m_0$ und eine kleine offene Umgebung V_0 von z_0 mit $V_0 \subset U_\varepsilon(J_n)$ für $n \geq m_0$. J ist abgeschlossen, also eine in $\mathbb{P}_1$ kompakte Menge. Wir erhalten eine endliche Überdeckung von J , bestehend aus Umgebungen V_ν repulsiver periodischer Punkte von P sowie Zahlen $m_\nu \in \mathbb{N}$ mit $V_\nu \subset U_\varepsilon(K_n)$ für $n \geq m_\nu$. Es sei n_0 das Maximum der m_ν . Dann gilt $J \subset \bigcup_\nu V_\nu \subset U_\varepsilon(K_n)$ für $n \geq n_0$. Wegen $J_n = \partial K_n$ und $J = \partial K$ erhalten wir $J = \partial K \subset U_\varepsilon(J_n) \subset U_\varepsilon(K_n)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

c.) Im Fall $K=J$ folgt die Proposition sofort aus dem eben bewiesenen Lemma. Wir untersuchen noch den Fall $K \neq J$. Wir bemerken, daß die Mengen K, J, K_n und J_n abgeschlossen sind; außerdem sind K und J unter P vollständig invariant sowie K_n und J_n vollständig invariant unter P_n . Deshalb können wir o.B.d.A. annehmen, daß jede periodische Komponente von $\text{int}(K)$ sogar periodisch ist. Wenn die Aussage der Proposition falsch ist, so existiert nach Lemma II.4 und wegen $\partial K \subset J$ ein Gebiet $G \subset K \setminus J$ mit $G \cap U_\varepsilon(K_n) = \emptyset$ für ein $\varepsilon > 0$ und unendlich viele $n \in \mathbb{N}$; wir nehmen $G \cap U_\varepsilon(K_n) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an. Es gilt $U_\varepsilon(G) \cap J = \emptyset$, also $U_\varepsilon(G) \subset F \cap K$. Sullivans Präperiodizitätstheorem liefert ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $P^m(G)$ in einer invarianten Komponente von $\text{int}(K)$ liegt. Es gilt $P^m(G) \subset P^m(U_\varepsilon(G)) \subset K$. Mit der Stetigkeit von $\mathcal{P}$ erhalten wir $P_n^m(G) \subset P_n^m(U_\varepsilon(G))$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$; für diese n folgt aus der Invarianz von K_n bezüglich P_n : $P_n^m(G) \cap K_n = \emptyset$. Wir ersetzen G durch $P^m(G)$. Dann gilt $G \subset K$ und $G \cap K_n = \emptyset$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Gemäß der Aufstellung in Sullivans Klassifikationstheorem müssen wir vier Fälle unterscheiden:

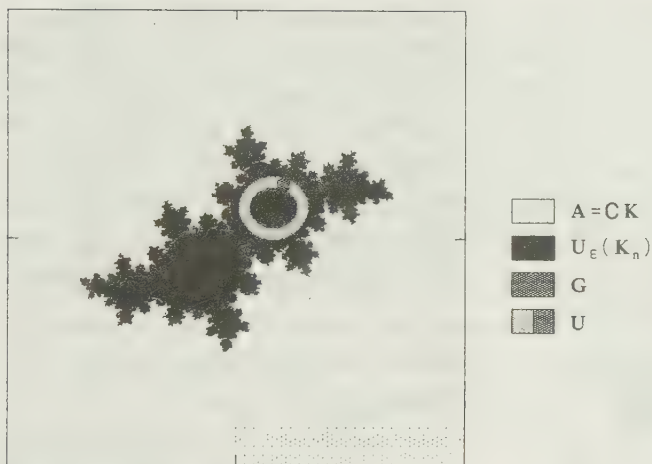
- 1.) G liegt in dem sofortigen Attraktionsbereich eines attraktiven Fixpunktes z_0 von P .
- 2.) G liegt in dem Attraktionsbereich eines rational indifferenten Fixpunktes von P .
- 3.) G liegt in einer Siegel-Scheibe D von P .
- 4.) G liegt in einem Herman-Ring von P .

d.) Der zweite Fall ist in den Voraussetzungen der Proposition ausgeschlossen. Mit Hilfe des Maximum-Prinzips kann man zeigen, daß alle beschränkten Komponenten der Fatou-Menge eines Polynoms einfach zusammenhängend sind. Weil ein Herman-Ring nicht im Attraktionsbereich von ∞ liegen kann, folgt, daß ein Polynom keinen besitzen kann (s. [Bl], Theorem 9.2). Also können wir uns auf die Untersuchung der Fälle 1.) und 3.) beschränken.

Der erste Fall führt schnell zu einem Widerspruch: Wegen $z_0 \in K$ gilt $z_0 \neq \infty$. Attraktive periodische Punkte können parametrisiert werden, also gibt es nach dem Hauptlemma zu fast jedem $n \in \mathbb{N}$ einen attraktiven periodischen Punkt z_n von P_n mit $z_n \neq \infty$ und $G \subset \subset A^*(z_n)$; Wegen $z_n \neq \infty$ ist $A \cap A^*(z_n) = \emptyset$. Somit gilt $G \subset A^*(z_n) \subset K_n \subset U_\varepsilon(K_n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$: Widerspruch.

Man beachte, daß wir in dieser Argumentation - abgesehen davon, daß Polynome keine Herman-Ringe besitzen - nur die Tatsache benutzt haben, daß ∞ ein attraktiver periodischer Punkt von P bzw. P_n ist, nicht aber, daß P und P_n Polynome sind. Gleiches gilt für den nächsten Beweisschritt.

e.) Auf der Siegel-Scheibe D ist P konjugiert zu einer Rotation um einen irrationalen Winkel, also existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so daß $U := \bigcup_{\mu=0}^m P^\mu(G)$ eine unter P invariante Jordan-Kurve Γ enthält, d.h. es gilt $P(\Gamma) = \Gamma$. Diese Kurve kann so gewählt werden, daß sie das Zentrum ζ der Siegel-Scheibe nicht enthält.



Wir können $U \cap U_{\epsilon}(K_n) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Insbesondere sind $P(\Gamma)$ und Γ in U homotop. $\mathcal{P}$ war eine stetige Funktion; also gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq m$ auch $P_n(\Gamma)$ und Γ in U homotop sind. Wir nehmen o.B.d.A. $m = 0$ an. Weil A_n vollständig invariant unter P_n ist, folgt aus $U \cap K_n = \emptyset$, also $U \subset A_n$, für alle $\mu, n \in \mathbb{N}$: $P_n^{\mu}(U) \subset A_n$. Damit sind Γ und $P_n^{\mu}(\Gamma)$ für alle $\mu, n \in \mathbb{N}$ homotop in A_n . Das Zentrum ζ der Siegel-Scheibe D ist ein irrational indifferenter periodischer Punkt. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines (eindeutig bestimmten) Punktes $\zeta_n \in \mathbb{C}$ mit $P_n(\zeta_n) = \zeta_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta$. Nach Übergang zu Teilfolgen und Umnummerieren bleiben noch drei Möglichkeiten, die wir untersuchen müssen:

- α.) ζ_n ist ein attraktiver Fixpunkt von P_n für alle $n \in \mathbb{N}$,
- β.) ζ_n ist ein indifferenter Fixpunkt von P_n für alle $n \in \mathbb{N}$,
- γ.) ζ_n ist ein repulsiver Fixpunkt von P_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

f.) Wir werden in jedem dieser Fälle einen Widerspruch herleiten.

α .) Wir bezeichnen die Komponente von $\mathbb{P}_1 \setminus \Gamma$, die ζ enthält, mit $\text{Int}(\Gamma)$. Offensichtlich gilt $\text{Int}(\Gamma) \subset \subset D$ und $\zeta_n \in \text{Int}(\Gamma)$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$. Letzteres impliziert $\zeta_n \neq \infty$ und $A_n \cap A^*(\zeta_n) = \emptyset$. Aus $\Gamma \subset A_n$ und dem Zusammenhang von $A^*(\zeta_n)$ folgt $A^*(\zeta_n) \subset \text{Int}(\Gamma)$. Nach Theorem I.5 enthält $A^*(\zeta_n)$ einen kritischen Punkt c_n . Diese Punkte besitzen einen Häufungspunkt $c \in \overline{\text{Int}(\Gamma)} \subset D$. Dann ist c ein kritischer Punkt von P , aber P ist auf D injektiv: Widerspruch.



β .) Weil ζ ein irrational indifferenter Fixpunkt ist, kann $P'_n(\zeta_n) = 1$ nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gelten. Daher können wir (fast) alle ζ_n parametrisieren und durch attraktive Fixpunkt ξ_n von P_{μ_n} ersetzen mit einer Nullfolge $\{|\mu_n - \lambda_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dann folgt aus dem Hauptlemma, daß $G \cap K_{\mu_n} = \emptyset$ für $|\mu_n - \lambda_n|$ hinreichend klein gilt. Dieses ist aber gerade die Situation von Fall α .)

γ.) Wir betrachten $C_n := J_n \cap \text{Int}(\Gamma)$. Weil ζ_n ein repulsiver Fixpunkt von P_n ist, gilt $\zeta_n \in J_n$ und damit $C_n \neq \emptyset$. Wegen $\Gamma \subset A_n$ ist C_n eine kompakte Teilmenge von $\text{Int}(\Gamma)$. $\text{Int}(\Gamma)$ ist unter P invariant, also gilt $P_n(C_n) \subset \text{Int}(\Gamma)$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Invarianz der Julia-Menge folgt dann die von C_n . Wir befinden uns nun in der folgenden Situation: Ein Punkt $\zeta_n \in J_n$ besitzt eine offene Umgebung $\text{Int}(\Gamma)$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n^\vee(J_n \cap \text{Int}(\Gamma)) \subset \text{Int}(\Gamma)$. Nach Proposition I.7 ist dann $J_n \subset \text{Int}(\Gamma)$. Wie wissen aber $J \cap \text{Int}(\Gamma) = \emptyset$ und $J \subset U_\varepsilon(J_n)$. Damit liegen auch für fast alle $n \in \mathbb{N}$ im Komplement von $\text{Int}(\Gamma)$ Punkte der Julia-Menge J_n : Widerspruch. $\square$

§ 2. Verallgemeinerung für rationale Funktionen

Wir betrachten jetzt eine beliebige holomorphe Familie $\mathcal{R}$ rationaler Funktionen. Dann gilt i. A. nicht mehr, daß ∞ ein attraktiver Fixpunkt von R_λ ist; wir müssen deshalb die Definition der ausgefüllten Julia-Mengen aus § 1 abändern. Wir fixieren ein $\lambda \in M$ und nehmen an, daß R_λ attraktive Zyklen $Z_j(\lambda)$ der Ordnung $m_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $j \in I$ besitzt. I sei eine feste nichtleere Indexmenge. Wir schließen **nicht** aus, daß R_λ weitere attraktive Zyklen besitzt. Wir können annehmen, daß die $Z_j(\lambda)$ paarweise disjunkt sind. Die Elemente der $Z_j(\lambda)$ sind attraktive periodische Punkte, die wir nach dem Satz über implizite Funktionen auf einer in M offenen Umgebung parametrisieren können. Wir ersetzen M durch diese Umgebung und erhalten für jedes $j \in I$ eine auf M holomorphe Funktion $\mu \mapsto Z_j(\mu)$, die M abbildet in den $\mathbb{P}_1^{m_j}$. Wir schreiben $A_\mu := \bigcup_{j \in I} A_{R_\mu}(Z_j(\mu))$ und definieren:

Definition II.2 Für $\mu \in M$ nennen wir die Menge $K_\mu := \bigcup_{j \in I} A_\mu$ die ausgefüllte Julia-Menge der Funktion R_μ .

Anmerkung: Die ausgefüllte Julia-Menge wird also in Abhängigkeit von der Wahl der Indexmenge I definiert.

Wie in §1 wählen wir eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ und formulieren nun mit den Bezeichnungen aus §1 das Hauptergebnis dieses Kapitels:

Theorem II.5 *Es sei $\mathcal{R} : M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; (\mu, z) \mapsto R_\mu(z)$ eine holomorphe Familie rationaler Funktionen vom Grade $d \geq 2$ und $\lambda \in M$. Falls R_λ keinen rational-indifferenten periodischen Punkt besitzt, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in]0, d(\lambda, \partial M)[$ mit $|\lambda - \mu| < \delta \Rightarrow d(K_\mu, K_\lambda) < \varepsilon$.*

Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, ist die Voraussetzung, daß R_λ keinen rational indifferenten periodischen Punkt besitzt, notwendig.

Beweis: a.) Der einzige für uns wichtige Unterschied zwischen Polynomen und beliebigen rationalen Funktionen ist, daß letztere Herman-Ringe besitzen können. Wir können also nicht wie im Beweis der Proposition II.2 den vierten Fall ausschließen. Ansonsten bleibt dieser Beweis gültig: Denn wir haben nicht ausgenutzt, daß die betrachteten Funktionen Polynome sind, sondern nur, daß ∞ ein attraktiver Fixpunkt ist - dessen Rolle wurde jetzt von den attraktiven Zyklen $Z_j(\mu)$ übernommen. Es reicht also zu zeigen, daß das Gebiet $G \subset K \setminus J$ nicht in einem Herman-Ring H der Funktion R liegen kann.

b.) Ersetzen wir die R_μ durch hinreichend hohe Iterierte, so können wir $R(H) = H$ annehmen. Wie bei der Behandlung des dritten Falles finden wir ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $U := \bigcup_{v=0}^m R^v(G)$ eine unter R invariante Jordankurve Γ enthält. Weil Γ und $R(\Gamma)$ homotop in U sind, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Homotopie Γ und $R_n(\Gamma)$ in U . Weil K_n vollständig invariant unter R_n ist und $G \cap K_n = \emptyset = U \cap K_n$ gilt, ergibt sich aus $R_n^v(U) \cap K_n = \emptyset$

für alle $v \in \mathbb{N}$ und (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ die Homotopie von Γ und $R_n^v(\Gamma)$ in A_n . Γ liegt für ein $j \in I$ in dem Attraktionsbereich $A_n(Z_j(\mu))$. Wir fixieren nun n . Für v hinreichend groß liegt $\Gamma_v := R_n^v(\Gamma)$ in einer sehr kleinen, einfach zusammenhängenden Umgebung eines Elementes von $Z_j(\mu)$. Damit ist Γ_v in A_n nullhomolog. Wegen $\partial H \subset J$ gibt es repulsive periodische Punkte $w, z \in J$ mit $z \in \text{Int}(\Gamma)$ und $w \in \text{Ext}(\Gamma)$ (dabei sei $\text{Int}(\Gamma)$ eine Komponente von $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ und $\text{Ext}(\Gamma)$ die andere). Parametrisierung dieser Punkte liefert die Existenz repulsiver Fixpunkte $z_n \in J_n \cap \text{Int}(\Gamma)$ und $w_n \in J_n \cap \text{Ext}(\Gamma)$. Damit ist Γ nicht in $A_n \subset \mathbb{P}_1 \setminus \{z_n, w_n\}$ nullhomolog. Wegen der Homotopie von Γ und Γ_v in $A_n \subset \mathbb{C} \setminus J_n \subset \mathbb{P}_1 \setminus \{z_n, w_n\}$ kann Γ_v in A_n nicht nullhomolog sein: Widerspruch. $\square$

§ 3. Das Beispiel von Pierre Lavours

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit der wohlbekannten Mandelbrot-Familie $\mathcal{M} : \mathbb{C} \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{C} ; (\lambda, z) \mapsto z^2 + \lambda$. In seiner Arbeit [La] studierte Lavours für Folgen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $I :=]\frac{1}{4}, \infty[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \frac{1}{4} =: \lambda_0$ den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n}$. Lavours bewies, daß dieser nicht eindeutig bestimmt ist. D.h. es existieren Folgen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lambda_0$ so, daß die Grenzwerte $C_1 := \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\lambda_n}$ und $C_2 := \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\mu_n}$ existieren und verschieden sind. Falls also für eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$ zufällig $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{\lambda_n} = K_{\lambda_0}$ sein sollte, so gilt dieses für andere Folgen nicht mehr. Diese Aussage läßt sich auch auf weitere Familien übertragen. Damit erhalten wir als Ergebnis dieses Paragraphen die

Proposition II.6 *Die Aussage von Theorem II.5 kann falsch werden, wenn R_{λ_0} einen rational indifferenten periodischen Punkt besitzt.*

Für diese Proposition werden wir noch einen elementaren Beweis geben, der erheblich einfacher als der von Lavours ist. Allerdings werden wir nicht zeigen können, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{\lambda_n}$ von der gewählten Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abhängt. Wir beweisen das

Lemmal.7 Für die Familie $\mathcal{M}$ gilt: Es existiert eine Umgebung $U \subset K_{\lambda_0}$ der Null und ein $\delta > 0$ mit $U \cap K_{\lambda} = \emptyset$ für alle $\lambda \in]\lambda_0, \lambda_0 + \delta[=: I$.

Hieraus folgt sofort, daß für jede Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$ stets $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{\lambda_n} \neq K_{\lambda_0}$ gilt. Damit ist natürlich die Proposition bewiesen. Wir wenden uns nun dem Beweis des Lemmas zu.

Beweis:

a.) Wir beginnen mit einigen Vorarbeiten. Schon Fatou bewies in [F3], daß J_{λ_0} eine Jordan-Kurve mit $0 \in \text{Int}(J_{\lambda_0})$ und $\infty \in \text{Ext}(J_{\lambda_0})$ ist. Der Punkt $z_0 = \frac{1}{2}$ ist ein rational indifferenter Fixpunkt von R_{λ_0} mit $\text{int}(K_{\lambda_0}) = A_{\lambda_0}(z_0)$ und $C K_{\lambda_0} = A_{\lambda_0}(\infty)$. Aus Theorem I.10 ii.) folgt $J_{\lambda_0} \subset D_4(0)$. Das offene Rechteck $\mathcal{B} := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Re } z < \frac{1}{2}, 0 < |\text{Im } z| < \frac{1}{2}\}$ liegt in $\text{Int}(K_{\lambda_0})$. Eine leichte Rechnung liefert nämlich $R_{\lambda_0}(z) \in \mathcal{B}$ für alle $z \in \partial \mathcal{B} \setminus \{z_0\}$, woraus $R_{\lambda_0}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \subset F_{\lambda_0}$ und $\mathcal{B} \cap A_{\lambda_0}(\infty) = \emptyset$ folgt. Für $\lambda > \lambda_0$ und $x \geq 0$ erhält man $R_{\lambda}(x) > x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{\lambda}^n(x) = \infty$, also insbesondere $0 \in A_{\lambda}(\infty)$. Weiterhin sind die Punkte $z_0 \pm \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ für $\lambda \geq \lambda_0$ repulsive periodische Punkte von R_{λ} . Wir zeigen im folgenden die Existenz einer offenen Teilmenge $\mathcal{B}^*$ von $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}^* \cap K_{\lambda} = \emptyset$ und $R_{\lambda}(0) \in \mathcal{B}^*$ für $\lambda > \lambda_0$ und λ hinreichend nahe bei λ_0 . $U := R_{\lambda_0}^{-1}(\mathcal{B}^*)$ leistet dann das Gewünschte.

b.) Wir beweisen die

Hilfsaussage: Es gibt Zahlen $M, m > 0$ mit

$$\mathcal{B}^* := \{z \in \mathcal{B} : \text{Re } z > 0 \text{ und } |z - (z_0 \pm i \cdot M)| > M\} \subset A_{\lambda}(\infty) \\ \text{für } \lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + m.$$

Wir skizzieren zunächst die Beweisidee:

Wir suchen im Schritt c.) für $\lambda > \lambda_0$ eine $\mathcal{C}^1$ -Kurve Γ_λ in $\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

i.) $z_0 + i \cdot b(\lambda) \in \Gamma$ mit einem $b(\lambda) > 0$ und

ii.) In jedem Punkt z der Kurve Γ_λ ist der Richtungsvektor der Tangente von Γ_λ gegeben durch den Vektor von z nach $R_\lambda(z)$.

Für die Wahl $b(\lambda) = \sqrt{\lambda - \lambda_0} / C$ mit einer Konstante $C > 1$ ergibt sich für Γ_λ ein Kreis um $w_\lambda = z_0 + i \cdot \frac{1}{2}(C + b(\lambda))$ mit dem Radius $\rho_\lambda = \frac{1}{2} \cdot (C - b(\lambda))$. In Schritt d.) konstruieren wir mit Hilfe dieser Kurve die Menge $\mathcal{B}^*$: Wählt man C hinreichend groß und $\lambda > \lambda_0$ hinreichend nahe bei λ_0 , so folgt: Ist $z \in \Gamma_\lambda$ mit $0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im} z < \operatorname{Im} w_\lambda$, so gilt für den Schnittpunkt ζ der Tangente von Γ_λ in z mit der reellen Achse: $\zeta \in A_\lambda(\infty)$. Damit ergibt sich: $z, \bar{z} \in A_\lambda(\infty)$ für $0 \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ und $|z - w_\lambda| > \rho_\lambda$. Wir erhalten also $G_\lambda := \{z \in \mathcal{B} : \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } |z \pm w_\lambda| > \rho_\lambda\} \subset A_\lambda(\infty)$. Grenzübergang $\lambda \rightarrow \lambda_0$ liefert mit $M = C$ die Hilfsaussage.

c.) Wir übersetzen ii.) in eine Differentialgleichung, die wir unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung i.) lösen. Wir erhalten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\gamma_\lambda'(t) = (\gamma_\lambda(t))^2 - \gamma_\lambda(t) + \lambda \quad \text{mit } \gamma_\lambda(0) = z_0 + i \cdot b(\lambda).$$

Eine elementare Rechnung liefert als Lösung:

$$\gamma_\lambda(t) = z_0 + i \cdot \sqrt{\lambda - \lambda_0} \cdot \frac{\beta_\lambda - i \cdot \tan(\sqrt{\lambda - \lambda_0} \cdot t)}{1 - i \cdot \beta_\lambda \cdot \tan(\sqrt{\lambda - \lambda_0} \cdot t)}$$

mit $b(\lambda) = \beta_\lambda \cdot \sqrt{\lambda - \lambda_0}$. Man sieht, daß die Lösungskurve γ_λ das Bild der reellen Achse unter einer Möbius-Transformation, also ein Kreis (oder eine Gerade) ist. Eine genauere Analyse ergibt, daß hier γ_λ ein Kreis mit den in b.) angegebenen Daten ist.

d.) Wir wählen $C = 8$ sowie $m' = 1$ und betrachten für $\lambda \in I' :=]\lambda_0, \lambda_0 + m' [$ die Menge $G_\lambda := \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < z_0 + \rho_\lambda, |\operatorname{Im} z| < \rho_\lambda \text{ und } |z \pm w_\lambda| > \rho_\lambda \}$. Wir zeigen nun $R_\lambda(\partial G_\lambda) \subset G_\lambda \cup A_\lambda(\infty)$ für λ nahe λ_0 ; dabei werden wir mehrere Fälle unterscheiden:

- i.) Aus $J_{\lambda_0} \subset \overline{D_4(0)}$ folgt mit Lemma II.3, daß (nach Verkleinern von m') für die $z \in \partial G_\lambda$ mit $\operatorname{Re} z = z_0 + \rho_\lambda$ gilt: $\lambda \in I' \Rightarrow R_\lambda(z) \in A_\lambda(\infty)$.
- ii.) Weiterhin liegen die $z \in \partial G$ mit $z_0 < \operatorname{Re} z < z_\lambda + \rho_\lambda$ auf der Kurve γ_λ , nach Konstruktion ist dann $R_\lambda(z) \in G_\lambda \cup A_\lambda(\infty)$ für $\lambda \in I'$.
- iii.) Es sei nun $z \in \partial G$ mit $0 < \operatorname{Re} z < z_0$ und $\operatorname{Im} z > 0$. Dann gilt $z \in \gamma_\lambda$ und nach Konstruktion $\operatorname{Re}(R_\lambda(z)) > \operatorname{Re} z$ sowie $|w_\lambda - R_\lambda(z)| > \rho_\lambda$. Weiterhin haben wir $\operatorname{Im}(R_\lambda(z)) = 2 \cdot \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z > 0$. Zusammenfassend erhalten wir $R_\lambda(z) \in G_\lambda \cup A_\lambda(\infty)$.
Aus Symmetriegründen überträgt sich diese Argumentation auf die $z \in \partial G$ mit $0 < \operatorname{Re} z < z_0$ und $\operatorname{Im} z < 0$.
- iv.) Für $z \in \partial G$ mit $\operatorname{Re} z = 0$ erhalten wir $\operatorname{Im} z = 0$ und $\operatorname{Re} z > 0$, also $R_\lambda(z) \in G_\lambda \cup A_\lambda(\infty)$.

Insgesamt ergibt sich, daß $G_\lambda \cup A_\lambda(\infty)$ ein vorwärts invariantes Gebiet, insbesondere auch eine Teilmenge von $A_\lambda(\infty)$ ist. Wir wissen aber, daß $A_\lambda(\infty)$ die einzige Komponente von F_λ ist, und erhalten $G_\lambda \cap K_\lambda = \emptyset$. Der Durchschnitt $\mathcal{B} := \operatorname{int} \left(\bigcap_{\lambda \in I'} G_\lambda \right)$ leistet dann das Gewünschte. $\square$

§ 4. A - priori - Aussagen

In diesem Paragraphen wollen wir mit Hilfe des Theorems II.5 erste Aussagen über die Stabilität von Julia-Mengen herleiten. Dabei werden wir Beispiele kennenlernen, in denen die Julia-Menge nicht stabil ist, solche, in denen sie stabil ist, und solche, in denen sie nur in gewissen Richtungen nicht stabil ist. Wir betrachten in diesem Paragraphen fast ausschließlich die Mandelbrot-Familie, die uns schon aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannt ist. Sie ist das wichtigste und zugleich am besten untersuchte Beispiel einer holomorphen Familie rationaler Funktionen. Außerdem können wir bereits an dieser Familie alle angedeuteten Phänomene studieren, so daß wir an dieser Stelle schwierige Untersuchungen allgemeinerer Familien umgehen können.

Wir beginnen mit einer einfachen Folgerung aus dem Lemma II.4:

Korollar II.8 *Es sei $\mathcal{R}: M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1: (\lambda, z) \mapsto R_\lambda(z)$ eine holomorphe Familie rationaler Funktionen vom Grade $d \geq 2$ und $\lambda_0 \in M$. Falls $J_{\lambda_0} = \mathbb{P}_1$ gilt, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in]0, d(\lambda_0, \partial M)[$ mit*

$$|\mu - \lambda_0| < \delta \Rightarrow d(J_\mu, J_{\lambda_0}) < \varepsilon.$$

Beweis: Das Lemma II.4 liefert zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Zahl $\delta \in]0, d(\lambda_0, \partial M)[$ mit $|\mu - \lambda_0| < \delta \Rightarrow J_{\lambda_0} \subset U_\varepsilon(J_\mu)$. Weiterhin folgt $J_\mu \subset \mathbb{P}_1 \subset U_\varepsilon(\mathbb{P}_1) \subset U_\varepsilon(J_{\lambda_0})$. $\square$

Wir wenden uns nun der Familie $\mathcal{M}: \mathbb{C} \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1: (\lambda, z) \mapsto R_\lambda(z) = z^2 + \lambda$ zu und erläutern einige ihrer Eigenschaften (s. auch [Bl], Chap. 10). Zu dieser Familie gehört die Mandelbrot-Menge

$$\mathbf{M} := \{ \lambda \in \mathbb{C} : J_\lambda \text{ ist zusammenhängend} \}.$$

Die Bedingung, daß J_λ zusammenhängend ist, ist äquivalent zu der Forderung $\lambda \in K_\lambda$. Der Punkt 0 ist der einzige endliche kritische Punkt und λ ist der einzige endliche kritische Wert von R_λ . Falls $\lambda \notin K_\lambda$ ist, so gilt $\lambda \in A_\lambda^{(\infty)}$ und somit liegen alle kritischen Punkte von R_λ in $A_\lambda^{(\infty)}$. Dann gilt $J_\lambda = K_\lambda$ und K_λ ist nicht zusammenhängend, sondern total unzusammenhängend (s. auch [Br], Theorem 10.1); gilt andererseits $\lambda \in K_\lambda$, so ist ∞ der einzige in $A_\lambda^{(\infty)}$ enthaltene kritische Punkt und nach Theorem I.10 ist $A_\lambda^{(\infty)}$ einfach zusammenhängend und somit K_λ zusammenhängend. Aus den verschärften Ungleichungen von Shishikura (Theorem III.2') folgt: R_λ besitzt einen beschränkten nicht-repulsiven periodischen Zyklus höchstens dann, wenn $\lambda \in \mathbf{M}$ ist. Weiterhin folgt aus dem Theorem III.2', daß R_λ höchstens einen beschränkten nicht-repulsiven Zyklus besitzen kann. Vollständigkeitshalber erwähnen wir noch: Die Menge $\mathbf{M}$ ist zusammenhängend und in der Kreisscheibe $D_4(0)$ enthalten.

Wir wählen ein $\lambda \in \mathbf{M}$ so, daß R_λ einen nicht-linearisierbaren irrational indifferenten periodischen Punkt besitzt. Dann kann nach Theorem III.2' R_λ keine weiteren nicht-repulsiven Zyklen besitzen, d.h. es gilt $F_\lambda = A_\lambda^{(\infty)}$ und $J_\lambda = K_\lambda$. Auch im Fall $\lambda \notin \mathbf{M}$ kann R_λ keine weiteren nicht-repulsiven Zyklen besitzen (nach der Definition von $\mathbf{M}$ liegen die kritischen Werte von R_λ , nämlich ∞ und λ , in $A_\lambda^{(\infty)}$), somit gilt $F_\lambda = A_\lambda^{(\infty)}$ und $J_\lambda = K_\lambda$. Die Lemmata II.3 und II.4 liefern dann die

Proposition II.9 *In den folgenden Fällen existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|\lambda - \mu| < \delta \Rightarrow d(J_\lambda, J_\mu) < \varepsilon$.*

- i.) R_λ besitzt einen nicht-linearisierbaren irrational indifferenten periodischen Punkt.
- ii.) Es gilt $\lambda \notin \mathbf{M}$.

Mit anderen Worten: Die Julia-Menge J_λ ist in diesen Fällen *stabil*.
Ein weiteres wichtiges Beispiel ist:

Proposition II.10 Falls R_λ hyperbolisch ist, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|\lambda - \mu| < \delta \Rightarrow d(J_\lambda, J_\mu) < \varepsilon$.

Diese Proposition folgt sofort aus dem Hauptlemma und Theorem II.5. Naheliegender ist es, Theorem I.11 heranzuziehen. Dieses ist aber nur möglich, wenn R_λ keinen superattraktiven periodischen Punkt besitzt - anderenfalls gehört λ zu der am Ende von § I.3 beschriebenen Ausnahmemenge S . Wir betrachten nun ein $\lambda \in \mathbf{M}$ so, daß R_λ (genau) eine Siegel-Scheibe (mit Zentrum ζ) besitzt. Dann ist ζ ein irrational indifferenter Fixpunkt, der nach dem Satz über implizite Funktionen parametrisiert werden kann. Hieraus folgt mit Theorem I.9 die Existenz einer Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbf{M}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ so, daß jedes R_{λ_n} einen nicht-linearisierbaren irrational indifferenten Fixpunkt besitzt. Dann gilt:

- i.) $J_{\lambda_n} = K_{\lambda_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
- ii.) $J_\lambda \neq K_\lambda$
- iii.) $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\lambda_n} = K_\lambda \neq J_\lambda$.

Damit haben wir die erste Hälfte der nächsten Proposition bewiesen; die andere folgt aus den zu Beginn des dritten Paragraphen erwähnten Untersuchungen Lavours'.

Proposition II.11 Falls R_λ eine Siegel-Scheibe oder einen rational indifferenten periodischen Punkt besitzt, so ist J_λ nicht stabil.

Wir werden aber später sehen, daß in diesen Fällen $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n} = J_{\lambda}$ für spezielle Folgen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ gilt. Eine hierfür notwendige (aber nicht hinreichende!) Bedingung wird sein, daß wir das Zentrum ζ der Siegel-Scheibe (welches ein irrational indifferenter Fixpunkt ist) bzw. den rational indifferenten Fixpunkt durch attraktive Fixpunkte approximieren können. Daß diese Bedingung nicht hinreichend sein kann, sieht man sehr schnell ein: Wir wählen wieder eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbf{M}$, so daß die Funktionen R_{λ_n} nicht-linearisierbare Fixpunkte besitzen. Diese können (fast) alle holomorph parametrisiert werden und wir finden Parameterwerte μ_n so, daß R_{μ_n} außer ∞ einen weiteren attraktiven Fixpunkt ζ_n besitzt und die Folge $|\lambda_n - \mu_n|$ sowie die Folge $d(J_{\lambda_n}, J_{\mu_n})$ Nullfolgen sind. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_{\mu_n} = K_{\lambda} \neq J_{\lambda}$.

Das Bild wird klarer, wenn man beachtet, daß λ und λ_n Randpunkte einer hyperbolischen Komponente G sind und daß der Rand ∂G nahe λ eine analytische Kurve ist. (Wie am Ende von §I.3 angemerkt, existiert eine offene Menge G' mit $\lambda \in \partial G'$ und der Eigenschaft: $\mu \in G' \Rightarrow R_{\mu}$ besitzt einen beschränkten attraktiven Zyklus; weil R_{μ} nur einen endlichen kritischen Punkt besitzt, sind diese R_{μ} alle hyperbolisch. Also ist G' in einer hyperbolischen Komponente enthalten.) Die richtige Forderung wird sein, daß die Folge der λ_n sich dem Randpunkt λ nicht-tangential bezüglich des Randes ∂G nähert. Hierauf werden wir in den letzten drei Kapiteln dieser Arbeit eingehen.

Wir wollen noch ein letztes Beispiel anführen. Wir wählen $\lambda \in \mathbf{M}$ so, daß R_{λ} eine Siegel-Scheibe besitzt; insbesondere genügt R_{λ} den Voraussetzungen der Proposition II.11. Weiterhin gilt $\lambda \in \partial \mathbf{M}$. Einen Beweis für diese nicht-triviale Aussage findet man [D1], §II.3. Wir wählen eine beliebige Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbf{C} \mathbf{M}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$. Dann gilt $J_{\lambda_n} = K_{\lambda_n}$ und wir erhalten wieder $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K_{\lambda} \neq J_{\lambda}$. Weil der Rand von $\mathbf{M}$ nirgends differenzierbar ist, ist für Folgen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbf{C} \mathbf{M}$, die

gegen ein $\lambda \in \partial \mathbf{M}$ konvergieren, der Begriff der nicht-tangentialen Annäherung nicht sinnvoll. Doch der eigentliche Grund für $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n} \neq J_{\lambda}$ ist folgender: Für $\mu \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{M}$ enthält der Attraktionsbereich von ∞ zwei kritische Punkte, nämlich 0 und ∞ . Im Grenzübergang $\mu \rightarrow \mu_0 \in \partial \mathbf{M}$ verläßt der kritische Punkt 0 diesen Attraktionsbereich. Er steht dadurch für einen endlichen nicht-repulsiven Fixpunkt ζ von R_{μ_0} zur Verfügung. Ist nun ζ das Zentrum einer Siegel-Scheibe, so ist dieses ein bedeutender Unterschied zwischen den Dynamiken von R_{μ} und R_{μ_0} , denn die R_{μ} besitzen keine Siegel-Scheiben.

Wir werden deshalb "verbieten", daß ein kritischer Punkt den Attraktionsbereich eines attraktiven Zyklus verläßt - es sei denn, dieser wird indifferent. Im vierten Kapitel werden wir Forderungen an die hyperbolischen Komponenten kennenlernen, unter denen wir die Kontrolle über die kritische Punkte haben. Wie wir sehen werden, besitzen die hyperbolischen Komponenten, die diese Bedingungen erfüllen, auch fast überall einen analytischen Rand. Damit können wir auch bei diesen Komponenten von nicht-tangentialer Annäherung an den Rand sprechen und entsprechende Konvergenzaussagen für die Julia-Mengen formulieren und beweisen. Dieses geschieht in den letzten drei Kapiteln dieser Arbeit.

Kapitel III

Quasikonforme Chirurgie

§1. Überblick

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Anzahl der Herman-Ringe und der nicht-repulsiven Zyklen einer rationalen Funktion R beschäftigen. Schon Fatou und Julia war bekannt, daß ein Zusammenhang mit der Zahl der kritischen Werte von R und somit mit dem Grad von R besteht. Hierzu lieferte Theorem I.5 einen ersten Beitrag.

Anmerkung: In der Literatur werden die Abschätzungen oft mit Hilfe der Anzahl der kritischen Punkte formuliert. Weil wir aber manchmal iterierte rationaler Funktionen betrachten werden, verwenden wir die Anzahl der kritischen Werte. Dadurch erhält man schärfere Aussagen, denn R^n besitzt $2d^n - 2$ kritische Punkte, aber $(2d - 2) \cdot n$ kritische Werte.

Für den Rest des Kapitels fixieren wir eine rationale Funktion R und schreiben $C := \{c \in \mathbb{P}_1 : c \text{ ist kritischer Wert von } R\}$ sowie

$$C^* := \overline{\{R^n(c) : c \in C \text{ und } n \in \mathbb{N}\}}.$$

Klassisch ist das folgende Resultat, dessen Beweis der Leser in [Bl] (Thm. 7.7) findet:

Proposition III.1 *Besitzt R einen Herman-Ring H oder eine Siegel-Scheibe S , so gilt $\partial H \subset C^*$ bzw. $\partial S \subset C^*$.*

Parallelen zu Theorem I.5 liegen nahe. Jenes besagt, daß es ohne kritische Werte keine attraktiven bzw. rational indifferenten periodischen Punkte gibt. Proposition III.1 sagt aus, daß es ohne kritische Werte keine Siegel-Scheiben oder Herman-Ringe gibt. Unklar ist aber noch, ob verschiedene Siegel-Scheiben auch verschiedene kritische Werte benötigen (wie es bei

den attraktiven periodischen Punkten der Fall ist). Dieses Problem hat M. Shishikura gelöst:

Theorem III.2 (Shishikuras Ungleichung) Für eine rationale Funktion R vom Grade d bezeichne;

n_a die Anzahl der attraktiven periodischen Zyklen,

n_i die Anzahl der indifferenten Zyklen und

n_h die Anzahl der Zyklen von Herman-Ringen.

Dann gilt: $n_a + n_i + 2 n_h \leq 2 d - 2$.

Wir werden in diesem Kapitel Shishikuras 1987 in [Sh] veröffentlichten Beweis überarbeiten, um eine Verschärfung dieser Ungleichung zu erhalten. Wir benötigen dazu den Begriff des freien kritischen Wertes:

Definition III.1 Ein kritischer Wert (bzw. Punkt) einer rationalen Funktion R heißt freier kritischer Wert (bzw. Punkt), falls er **nicht** in dem Attraktionsbereich eines attraktiven Zykels von R liegt.

Wir erläutern die große Bedeutung der freien kritischen Werte für die Dynamik der rationalen Funktionen an einem kleinen Beispiel. Wir betrachten dazu das Polynom $p(z) = z^2 + \frac{1}{4}$. Der Punkt $z_0 = \frac{1}{2}$ ist ein rational indifferenter Fixpunkt und in seinem Attraktionsbereich liegt der kritische Wert $c = \frac{1}{4}$, d.h. c ist freier kritischer Wert von p . Ändert man den Parameter $\frac{1}{4}$ ein wenig, so können folgende Möglichkeiten realisiert werden:

- der rational indifferente Fixpunkt wird attraktiv und sein Attraktionsbereich enthält den aus c hervorgehenden kritischen Wert.
- der rational indifferente Fixpunkt wird repulsiv und der aus c hervorgehende kritische Wert liegt im Attraktionsbereich des superattraktiven Fixpunktes ∞ .

- der rational indifferente Fixpunkt wird Zentrum einer Siegel-Scheibe und die Julia-Menge enthält gemäß Proposition III.1 den kritischen Wert.

Mit anderen Worten: Änderungen der Dynamik von P und somit Änderungen von J und K hängen eng mit Veränderungen des Orbits des freien kritischen Punktes zusammen. Die kritischen Werte dagegen, die im Einzugsbereich eines attraktiven Zyklus einer rationalen Funktion liegen, verbleiben dort, wenn die rationale Funktion etwas gestört wird. Sie sind nämlich nach Lemma II.3 an diese attraktiven Zyklen gebunden (also nicht frei). Wir formulieren nun die angekündigte Verschärfung von Shishikuras Ungleichung:

Theorem III.2' d' bezeichne die Zahl der *ohne* Vielfachheiten gezählten freien kritischen Werte von R , die nicht präperiodisch sind und n_i die Zahl der indifferenten Zyklen von R . Dann gilt:

- i.) $n_i \leq d'$ und
- ii.) in dem Fall $d' = n_i$ besitzt R keinen Herman-Ring.

Shishikura zeigte zuerst die Ungleichung $n_i \leq 2d - 2$, seine Argumentation bildet die Grundlage für die Herleitung unserer Ungleichung i.). Die Idee für den Beweis der zweiten Aussage stammt ebenfalls aus der Arbeit Shishikuras, welcher jeden Herman-Ring in zwei Siegel-Scheiben verwandelte. Unsere Argumentation wird kürzer sein, da wir uns mit einem schwächeren Resultat begnügen können. Würde man Shishikuras vollständige Argumentation übernehmen, so erhielte man die Ungleichung

$$n_i + 2n_h \leq d'.$$

Das wichtigste Hilfsmittel beim Beweis dieser Theoreme ist die quasikonforme Chirurgie. Diese Methode wurde von A. Douady und J. H. Hubbard in die Theorie der Julia-Mengen eingeführt (s. [D1] und [DH1]) und von Shishikura ausgebaut. Im nächsten Paragraphen geben wir

die Definition und einige Eigenschaften quasikonformer Abbildungen an. Im dann folgenden Paragraphen beschreiben wir die Methode der quasikonformen Chirurgie. Das Hauptergebnis ist das qc-Lemma. Es spielt wie in Shishikuras Arbeit auch in unserer eine zentrale Rolle: wir werden es mehrfach anwenden. Deshalb beschränken wir uns hier nicht darauf, es nur zu formulieren, sondern werden es auch beweisen. Dabei halten wir uns an den Originalbeweis von Douady und Hubbard ([D1] und [DH1]). Der vierte Paragraph ist dem Beweis der ersten Aussage von Theorem III.2' gewidmet, die zweite Aussage beweisen wir im fünften Paragraphen.

Im letzten Paragraphen leiten wir eine weitere Verschärfung von Shishikuras Ungleichung her. Wir greifen dazu das von C. Pommerenke und B. Rodin eingeführte Konzept der "ampln" Teilmengen der kritischen Punkte auf. Ein Ergebnis wird sein, daß bei der Abschätzung der Anzahl der indifferenten Zyklen von den kritischen Werten, die nicht disjunkte Orbits besitzen, nur einer berücksichtigt werden muß. Als Folgerung erhalten wir, daß die freien kritischen Punkte paarweise disjunkte Orbits besitzen, falls in der Aussage i.) von Theorem III.2' die Gleichheit gilt. Wir beenden das Kapitel mit einer Untersuchung des folgenden Problems: Ist ein indifferenter periodischer Punkt, der durch Störung eines linearisierbaren indifferenten periodischen Punktes entstand, ebenfalls linearisierbar? Wir erhalten eine hinreichende Bedingung dafür, daß diese Frage positiv beantwortet werden kann.

§ 2. Quasikonforme Abbildungen

In diesem Paragraphen geben wir die Definition der quasikonformen Abbildungen sowie deren Eigenschaften an - soweit wir sie in dieser Arbeit benötigen. Ausführliche Darstellungen zur Theorie dieser Abbildungen findet der Leser in zahlreichen Monographien, wir verweisen hier exemplarisch auf die von Olli Lehto [Le].

Im folgenden sei für eine auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{P}_1$ definierte Funktion g die Norm $\|g\|_\infty$ gegeben durch $\|g\|_\infty := \inf \{ k \geq 0 : |g(z)| \leq k \text{ fast überall auf } G \}$. Wir verzichten bewußt darauf, dem Normsymbol als Index das Symbol für das betreffende Gebiet hinzuzufügen. Aus dem Kontext wird stets ersichtlich sein, welches Gebiet gemeint ist.

Definition III.2 Eine Abbildung f zwischen zwei Gebieten G_1 und G_2 in $\mathbb{P}_1$ heißt quasikonform oder auch qc-Abbildung, falls gilt:

- i.) f ist ein orientierungserhaltender Homöomorphismus von G_1 auf G_2 ,
- ii.) f besitzt lokal integrierbare Ableitungen im Distributionssinne und
- iii.) es existiert eine Funktion $\mu_f \in L^\infty(G_1)$ mit $\|\mu_f\|_\infty < 1$ und

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \mu_f \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \text{ fast überall auf } G_1.$$

Die Funktion μ_f heißt komplexe Dilatation von f .

Anmerkungen: 1.) Die komplexe Dilatation ist durch die Gleichung (1) für jede Funktion definiert, die Ableitungen im Distributionssinne besitzt. Für die Definition der komplexen Dilatation wird insbesondere nicht benötigt, daß f (lokal) injektiv ist. Es reicht, daß die Menge der Punkte, in denen die Ableitungen von f verschwinden, bezüglich des Lebesgue-Maßes eine Nullmenge ist. Dieses ist insbesondere dann gewährleistet, wenn f eine eigentliche $\mathcal{C}^1$ -Abbildung ist.

2.) Der komplexen Dilatation kann man ansehen, ob eine Abbildung orientierungserhaltend ist. Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn $\|\mu_f\|_\infty < 1$ auf allen Kompakta in G_1 gilt.

Im folgenden werden wir f_z und $f_{\bar{z}}$ für die (verallgemeinerten) Ableitungen von f nach z bzw. $\bar{z}$ schreiben. Bekanntlich ist ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus, dessen komplexe Dilatation verschwindet, sogar holomorph. (Das Verschwinden der komplexen Dilatation bedeutet Verschwinden der Ableitung nach $\bar{z}$.) Die folgende Verschärfung dieser Aussage ergibt sich aus dem Weylschen Lemma (s. [Fo], Satz 24.9):

Proposition III.3 Eine quasikonforme Abbildung mit fast überall verschwindender komplexer Dilatation ist eine biholomorphe Abbildung.

Man verifiziert leicht die Kettenregel:

Für zwei qc-Abbildungen f und g gilt $\mu_{g \circ f} = \frac{f_{\bar{z}} + \mu_g \cdot \overline{f_z}}{f_z + \mu_g \cdot f_{\bar{z}}}$ fast überall.

Hieraus kann man die folgenden Aussagen ableiten:

Proposition III.4 Für zwei qc-Abbildungen $f: G_1 \rightarrow G_2$ und $g: G_2 \rightarrow G_3$ gilt:

- i.) Das Kompositum $g \circ f$ ist eine qc-Abbildung.
- ii.) f ist holomorph $\Rightarrow \|\mu_{g \circ f}\|_{\infty} = \|\mu_g\|_{\infty}$.
- iii.) g ist genau dann holomorph, wenn $\mu_{g \circ f} = \mu_f$ fast überall gilt.

Von entscheidender Bedeutung ist das

Theorem III.5 (Ahlfors-Bers-Theorem, s. [Le]) Es sei $\mu \in L^{\infty}(\mathbb{C})$ eine beliebige Funktion mit $\|\mu\|_{\infty} < 1$. Dann existiert genau eine qc-Abbildung $f: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ mit:

- i.) $\mu_f = \mu$ fast überall und
- ii.) $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\infty) = \infty$.

Das Ahlfors-Bers-Theorem garantiert also die Existenz einer qc-Abbildung zu vorgegebener komplexer Dilatation. Eine andere Möglichkeit zeigt das λ -Lemma. Es wurde von D. Sullivan und W.P. Thurston in [ST] bewiesen und erlaubt die Konstruktion einer holomorphen Familie quasikonformer Abbildungen, deren Funktionswerte auf einer (beliebigen) Teilmenge $E \subset \mathbb{C}$ vorgeschrieben sind. Vorausgesetzt wird, daß die vorgegebenen Funktionswerte eine Störung der Identität auf E sind; die damit konstruierten qc-Abbildungen werden dann Störungen der Identität auf $\mathbb{P}_1$ sein.

Lemma III.6 (λ -Lemma) Es sei $E \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge und $f: \mathbb{D} \times E \rightarrow \mathbb{P}_1$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- i.) für alle $\lambda \in \mathbb{D}$ ist $f(\lambda, \cdot): E \rightarrow \mathbb{P}_1$ injektiv,
- ii.) für alle $z \in E$ ist $f(\cdot, z) \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ und
- iii.) $f(0, \cdot)$ ist die Identität auf E .

Dann existiert eine Zahl $r \in]0, 1[$ sowie eine Funktion $F: D_r(0) \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ mit folgenden Eigenschaften:

- i.) $F(\lambda, z) = f(\lambda, z)$ auf $D_r(0) \times E$,
- ii.) für alle $z \in \mathbb{P}_1$ gilt $F(\cdot, z) \in \mathcal{O}(D_r(0))$,
- iii.) für alle $\lambda \in D_r(0)$ ist $F(\lambda, \cdot)$ eine qc-Abbildung des $\mathbb{P}_1$ auf sich und
- iv.) $F(0, \cdot)$ ist die Identität auf $\mathbb{P}_1$.

Sullivan und Thurston zeigten weiterhin, daß für r eine positive, von f unabhängige Zahl gewählt werden kann. In [PR] bewiesen Pommerenke und Rodin, daß $r = \frac{1}{3}$ das gewünschte leistet.

§ 3. Die quasikonforme Chirurgie

Ziel der quasikonformen Chirurgie ist es, die Existenz rationaler Funktionen mit bestimmten Eigenschaften nachzuweisen. Dieses ist z.B. bei dem Beweis der Ungleichung von Shishikura notwendig. Theorem I.5 liefert die Beweis-idee:

Weil jeder attraktive Zyklus einen kritischen Wert benötigt, reicht es, die rationale Funktion so abzuändern, daß alle indifferenten Zyklen attraktiv werden. Wenn die Abänderung hinreichend klein gewählt wird, so bleiben die attraktiven Zyklen attraktiv und ihre Attraktionsbereiche ändern sich nach Lemma II.3 nur wenig. Theorem I.5 liefert dann die Ungleichung aus Theorem III.2'. Leider sind Versuche, diese Abänderungen explizit zu konstruieren, von vornherein zum Scheitern verurteilt. Um dieses einzusehen, betrachten wir eine rationale Funktion R vom Grade d , die keinen attraktiven Zyklus besitzt. Wir müssen zeigen, daß die Anzahl der indifferenten Zyklen von R kleiner als $2d-1$ ist. Dazu nehmen wir an, daß R $2d-1$ indifferente Zyklen besitzt; zur Vereinfachung gehen wir davon aus, daß es sich um $2d-1$ indifferente Fixpunkte handelt.

Wir versuchen zunächst R so abzuändern, daß die Fixpunkte erhalten bleiben. Dadurch sind $2d-1$ Koeffizienten der gestörten Funktion bereits festgelegt. Eine rationale Funktion besitzt $2d+2$ Koeffizienten, von diesen kann einer stets zu eins normiert werden. Wir haben also noch zwei Freiheitsgrade, um die Ableitungen in den Fixpunkten festzulegen. D.h. wir können zwei Fixpunkte attraktiv machen. In dem Fall $2d-1 > 2$ sind dann die Ableitungen der übrigen Fixpunkte bereits festgelegt - und es besteht kein Anlaß zu der Hoffnung, daß sie alle attraktiv sind.

Also muß auf die Forderung, daß die Fixpunkte erhalten bleiben, verzichtet werden. Um aber die Ableitungen in den Fixpunkten der gestörten Funktion zu kontrollieren, benötigt man Formeln für die Fixpunkte. Das sind Formeln für die Nullstellen von Polynomen - wenn der Grad d hinreichend groß ist, gibt es diese aber nicht!

Als Ausweg aus dieser Situation erwies sich die quasikonforme Chirurgie. Man verzichtet nämlich zunächst darauf, daß die gestörten Funktionen holomorph sind. Dann kann man sehr leicht R so abändern, daß die indifferenten Fixpunkte von R attraktiv werden. Mit etwas Geschick kann diese Störung von R so gewählt werden, daß das Ergebnis eine eigentliche

$\mathcal{C}^\infty$ -Abbildung f des $\mathbb{P}_1$ auf sich vom Grade d ist und f nur auf einem Gebiet G nicht holomorph ist, für das stets $f^n(G) \cap G = \emptyset$ gilt. Mit Hilfe des qc-Lemmas zeigt man die Existenz einer komplexen Struktur auf $\overline{\mathbb{C}}$, bezüglich der f holomorph ist. f entspricht dann einer rationalen Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.

Die zentrale Rolle in der quasikonformen Chirurgie spielt das qc-Lemma, das für die Konstruktion der neuen komplexen Struktur benötigt wird:

Lemma III.7 (qc-Lemma) *Es sei $g: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ eine eigentliche orientierungserhaltende $\mathcal{C}^1$ -Abbildung (oder allgemeiner eine Abbildung, deren komplexe Dilatation gemäß Anmerkung 1 definiert ist). Weiterhin seien für $l \in I := \{1, \dots, m\}$ disjunkte Gebiete $E_l \subset \mathbb{P}_1$ vorgegeben, zu denen es quasikonforme Abbildungen $\Phi_l: E_l \rightarrow E'_l$ und eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) $g(E) \subset E$, wobei $E := E_1 \cup \dots \cup E_m$ ist,
- (ii) $\Phi \circ g \circ \Phi^{-1}$ ist holomorph auf $E'_l := \Phi_l(E_l)$, dabei sei Φ definiert durch $\Phi|_{E_l} := \Phi_l$,
- (iii) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g \equiv 0$ auf $\mathbb{P}_1 \setminus g^{-N}(E)$.

Dann existiert eine quasikonforme Abbildung $\varphi: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ so, daß $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ eine rationale Funktion und φ auf $\mathbb{P}_1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(E)$ holomorph ist.

Beweis: a.) Wir skizzieren zunächst den Beweis. Das Problem besteht darin, die neue komplexe Struktur auf $\overline{\mathbb{C}}$ zu konstruieren. Wir setzen $\sigma_1 := \Phi^* \sigma_0$ auf E , d.h. auf E wählen wir die via Φ zurückgezogene Standardstruktur σ_0 . Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ setzen wir $\sigma_1 := (g^n)^* \sigma_0$ auf $g^{-n}(E) \setminus g^{1-n}(E)$. Und auf $\mathbb{P}_1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(E)$ wählen wir $\sigma_1 := \sigma_0$. Dann ist g eine holomorphe Abbildung des $(\overline{\mathbb{C}}, \sigma_1)$ auf sich, d.h. es existiert eine qc-Abbildung $\varphi: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ so, daß die Funktion $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ holomorph ist.

b.) Wir definieren zunächst μ_φ . Auf E setzen wir $\mu := \mu_\Phi$. Weil Φ quasikonform ist, gilt $\|\mu\|_\infty < 1$ auf E . g ist eine eigentliche orientierungserhaltende Abbildung des $\mathbb{P}_1$ auf sich, nach Anmerkung 2 zu Definition III.2 folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$ dann: $\|\mu_g\| < 1$ auf $g^{-n}(E) \setminus g^{1-n}(E)$ für $n = 1, \dots, N$. Wir setzen also $\mu := \mu_{\Phi \circ g^n}$ auf $g^{-n}(E) \setminus g^{1-n}(E)$. Weil nach der Kettenregel das Kompositum quasikonformer Abbildungen wieder eine qc-Abbildung ist (s. Proposition III.4), haben wir $\|\mu\|_\infty < 1$ auf $g^{-N}(E)$. Für $n > N$ setzen wir ebenfalls $\mu := \mu_{\Phi \circ g^n}$ auf $g^{-n}(E) \setminus g^{1-n}(E)$. Weil aber g auf diesen Gebieten holomorph ist, folgt mit Proposition III.4, Aussage ii.), daß auf $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(E)$ ebenfalls $\|\mu\|_\infty < 1$ gilt. Wir setzen noch $\mu \equiv 0$ auf $\mathbb{P}_1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(E)$. Nach dem Ahlfors-Bers-Theorem existiert nun eine qc-Abbildung φ des $\mathbb{P}_1$ auf sich mit $\mu = \mu_\varphi$ fast überall.

c.) Wir zeigen noch, daß $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ eine holomorphe Abbildung des $\mathbb{P}_1$ auf sich, also eine rationale Funktion ist. Nach Konstruktion verschwinden auf $\mathbb{P}_1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(E)$ die komplexen Dilatationen von φ und g . Somit verschwindet auf $\varphi(\mathbb{P}_1 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(E))$ die komplexe Dilatation von $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$. Auf $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(E)$ gilt nach Konstruktion $\mu_\varphi = \mu_{\varphi \circ g} = \mu_{\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} \circ \varphi}$ fast überall. Mit Proposition III.4, Aussage iii.) folgt, daß auf $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} g^{-n}(E)$ die komplexe Dilatation von $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ ebenfalls fast überall verschwindet. Das bedeutet, daß die komplexe Dilatation von $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ auf $\mathbb{C}$ fast überall verschwindet. Nach Proposition III.3 ist dann $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{P}_1)$. Weil nun φ insbesondere ein Homöomorphismus von $\mathbb{P}_1$ auf sich und g eine eigentliche Abbildung des $\mathbb{P}_1$ auf sich ist, erhalten wir: $\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ ist eine rationale Funktion mit $\deg(g) = \deg(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1})$.

§ 4. Beweis der ersten Aussage von Theorem III.2'

a.) Vorbereitungen: Im Attraktionsbereich jedes rational indifferenten Zyklus liegt nach Theorem I.5' stets ein nicht-präperiodischer kritischer Wert. Deshalb ist die Aussage schon bewiesen, falls die rationale Funktion keine irrational indifferenten Zyklen besitzt. Wir nehmen nun an, daß mindestens ein solcher Zyklus existiert, seine Ordnung sei n . Nach Koordinatentransformation können wir voraussetzen, daß folgende Annahmen erfüllt sind:

(R1) 0 ist Element dieses Zyklus mit $(R^n)'(0) = e^{2\pi i\tau}$ und einer Zahl $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(R2) $R^m(0) \neq \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(R3) $R^s(\infty) = 0$ für ein $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(R4) $R^m(z_0) = \infty$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow (R^m)'(z_0) \neq 0$.

Aus (R2) und (R3) folgt insbesondere, daß alle periodischen Punkte von R endlich sind und ∞ ein präperiodischer Punkt ist. (R4) bedeutet, daß alle kritischen Werte und alle kritischen Punkte von R endlich sind. Daher existiert ein Polynom P mit folgenden Eigenschaften:

(P1) $P(z_0) = 0$, falls z_0 ein nicht-repulsiver periodischer Punkt oder ein kritischer Punkt von R ist.

(P2) $\frac{P'(z_0)}{R'(z_0)} < 0$, falls z_0 ein indifferenter periodischer Punkt von R ist.

(P3) Ist c ein kritischer Punkt der Ordnung $n(c)$ von R , so auch von P .

(P4) Ist c ein präperiodischer kritischer Punkt von R , so gelte $P(R^m(c)) = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Für $\varepsilon > 0$ und ε hinreichend klein folgen dann:

Hilfsaussage 1: Ist z_0 ein nicht-repulsiver periodischer Punkt von R : so ist z_0 ein attraktiver periodischer Punkt von $R + \varepsilon P$.

Hilfsaussage 2: Ist c ein kritischer Wert (bzw. Punkt) der Ordnung $n(c)$ von R , so auch von $R + \varepsilon P$.

Hilfsaussage 3: Ist c ein präperiodischer kritischer Wert (bzw. Punkt) von R , so auch von $R + \varepsilon P$.

Die zweite Hilfsaussage folgt sofort aus (P1) und (P3), die dritte aus (P3) und (P4). Wir beweisen noch die erste. Dazu nehmen wir an, daß z_0 ein nicht-repulsiver periodischer Punkt der Ordnung n von R ist. Mit (P1) folgt, daß z_0 auch ein periodischer Punkt der Ordnung n von $R + \varepsilon P$ ist. Wir müssen zeigen, daß $|((R + \varepsilon P)^n)'(z_0)| < 1$ gilt.

$$\begin{aligned} \text{Wir haben } ((R + \varepsilon P)^n)'(z_0) &= \prod_{\nu=1}^n (R + \varepsilon P)'((R + \varepsilon P)^\nu(z_0)) \\ &= \prod_{\nu=1}^n (R + \varepsilon P)'(R^\nu(z_0)) \\ &= \left(\prod_{\nu=1}^n R'(R^\nu(z_0)) \right) \cdot \left(\prod_{\nu=1}^n \left(1 + \varepsilon \frac{P'(R^\nu(z_0))}{R'(R^\nu(z_0))} \right) \right). \end{aligned}$$

Der Betrag des ersten Produkts ist nach Voraussetzung kleiner oder gleich eins, denn z_0 ist ein nicht-repulsiver periodischer Punkt von R . Aus (P2) folgt, daß die Terme in dem zweiten Produkt für positives (aber hinreichend kleines ε) kleiner als eins sind. Also ist z_0 ein attraktiver periodischer Punkt von $R + \varepsilon P$ und die erste Hilfsaussage bewiesen. Wir bemerken noch, daß für ε hinreichend klein ein indifferenter periodischer Punkt z_0 von R ein attraktiver, aber nicht superattraktiver periodischer Punkt wird. Denn in der obigen Rechnung ist in diesem Fall der Betrag der ersten Klammer gleich eins und die Terme in dem zweiten Produkt verschwinden für kleine ε nicht.

b.) Skizzierung der weiteren Beweisschritte: Für die Funktion $R + \varepsilon P$ wird in der Regel $\deg(R + \varepsilon P) > \deg(R)$ gelten, d.h. $R + \varepsilon P$ besitzt mehr kritische Werte als R . Dieses ist aber unerwünscht, weil wir die Anzahl der indifferenten Zyklen durch die Anzahl der kritischen Werte abschätzen wollen. Daher multiplizieren wir P mit einer geeigneten $\mathcal{C}^\infty$ -Abschneidefunktion a , die außerhalb einer geeigneten Umgebung V von ∞ konstant gleich eins ist und auf einer etwas kleineren Umgebung von ∞ verschwindet. Dann ist $R + \varepsilon \cdot a \cdot P$ für kleine, positive ε eine eigentliche Abbildung des $\mathbb{P}_1$ auf sich mit $\deg(R + \varepsilon \cdot a \cdot P) = \deg(R)$. Dabei muß V so gewählt werden, daß $(R + \varepsilon \cdot a \cdot P)^n(V) \cap V = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt. (Wir werden später feststellen, daß V nicht unabhängig von ε gewählt werden kann.) a ist nur auf V nicht holomorph und wir können auf $R + \varepsilon \cdot a \cdot P$ das qc-Lemma anwenden. Das Ergebnis ist eine rationale Funktion R_ε mit folgenden Eigenschaften:

- i.) $\deg(R) = \deg(R_\varepsilon)$,
- ii.) die attraktiven Zyklen von R entsprechen attraktiven Zyklen von R_ε ,
- iii.) die indifferenten Zyklen von R entsprechen attraktiven Zyklen von R_ε ,
- iv.) die kritischen Werte von R_ε entsprechen **genau** den kritischen Werten von R ,
- v.) den nicht-freien kritischen Werten von R entsprechen kritische Werte von R_ε , die im Attraktionsbereich der unter ii.) erwähnten attraktiven Zyklen liegen,
- vi.) den präperiodischen kritischen Werten von R entsprechen präperiodische kritische Werte von R_ε .

Die unter iii.) erwähnten attraktiven Zyklen von R_ε benötigen jeweils einen nicht-präperiodischen kritischen Wert von R_ε . Aus iv.), v.) und vi.) folgt, daß hierfür nur die zur Verfügung stehen, die den freien nicht-präperiodischen kritischen Werten von R entsprechen. Also kann die Anzahl der unter iii.) erwähnten Zyklen von R_ε , die gleich der Anzahl der indifferenten Zyklen von R ist, nicht größer sein als die der freien nicht-präperiodischen kritischen Punkte von R . Das war aber zu zeigen.

c.) Konstruktion der Abschneidefunktion: Nach Hilfsaussage 1 ist 0 für kleine, positive ε ein attraktiver periodischer Punkt von $R + \varepsilon P$, daher existiert eine Zahl $\rho(\varepsilon) > 0$ mit:

$D_{\rho(\varepsilon)}(0)$ ist die größte Kreisscheibe um Null, die im Attraktionsbereich G_ε von 0 bezüglich $(R + \varepsilon P)^n$ liegt.

Eine Abschätzung für $\rho(\varepsilon)$ gibt die

Hilfsaussage 4: Zu jeder Zahl $\alpha > 0$ existieren Konstanten $K_1(\alpha) > 0$ und $\varepsilon_1(\alpha) > 0$ mit: $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(\alpha) \Rightarrow \rho(\varepsilon) > K_1(\alpha) \cdot \varepsilon^\alpha$.

Wir beweisen die Hilfsaussage am Ende dieses Paragraphen. $R^\#$ ist in ∞ holomorph mit $R^\#(\infty) = 0$. Also existieren zu jedem $\alpha > 0$ Konstanten $\varepsilon_R(\alpha) > 0$ und $K_R(\alpha) > 0$ mit

$$(2) \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_R(\alpha), |z| > K_R(\alpha) \varepsilon^{-\alpha} \Rightarrow |R^\#(z)| < \frac{1}{2} K_1(\alpha) \varepsilon^\alpha.$$

P ist ein Polynom, seinen Grad bezeichnen wir mit m . Dann existiert eine Konstante $K_P > 0$ mit: $|P(z)| \leq K_P \cdot |z|^m$ auf $\mathbb{C} \setminus D$.

Für $k > 2$ und $r(\varepsilon) := K_R(\frac{1}{km}) \cdot \varepsilon^{(-1/km)}$ folgt:

$$1 \leq |z| \leq 2r(\varepsilon) \Rightarrow |P(z)| \leq K_P \cdot (2K_R(\frac{1}{km}))^m \cdot \varepsilon^{(-1/k)}.$$

Für ε_P positiv und hinreichend klein und einer geeigneten Konstanten $K_0 > 0$ erhalten wir dann:

$$(3) \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_P, |z| < 2r(\varepsilon) \Rightarrow |P(z)| \leq K_0 \cdot \varepsilon^{(-1/k)}.$$

Wir wählen nun eine $\mathcal{C}^\infty$ -Abschneidefunktion f mit:

i.) $0 \leq f(z) \leq 1$ auf $\mathbb{P}_1$,

ii.) $f \equiv 0$ auf $\mathbb{P}_1 \setminus D_2(0)$ und $f \equiv 1$ auf $\mathbb{D}$

und definieren $a(z) := f\left(\frac{z}{r(\varepsilon)}\right)$. Wir betrachten die Funktion

$$R_\varepsilon: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; z \mapsto R(z) + \varepsilon \cdot a(z) \cdot P(z).$$

Auf $D_{r(\varepsilon)}(0)$ gilt $R_\varepsilon \equiv R + \varepsilon P$ und auf $\mathbb{P}_1 \setminus D_{2r(\varepsilon)}(0)$ haben wir $R_\varepsilon \equiv R$. Weiterhin liefert (3) auf $\mathbb{P}_1$ die Abschätzung

$$(4) \quad |R_\varepsilon(z) - R(z)| < K_0 \cdot \varepsilon^{(1-1/k)}.$$

Wir haben $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) = \infty$. Für $\sigma = 1, \dots, s$ gilt $R^\sigma(\infty) \neq \infty$. Wir erhalten für ε hinreichend klein die Inklusion $R^\sigma(\mathbb{P}_1 \setminus D_{r(\varepsilon)}(0)) \subset D_{r(\varepsilon)}(0)$ sowie mit (4): $(R_\varepsilon)^\sigma(\mathbb{P}_1 \setminus D_{r(\varepsilon)}(0)) \subset D_{r(\varepsilon)}(0)$. Aus der Holomorphie von R_ε^σ auf $R_\varepsilon(\mathbb{P}_1 \setminus D_{r(\varepsilon)}(0))$ folgt für $z_1, z_2 \in R_\varepsilon(\mathbb{P}_1 \setminus D_{r(\varepsilon)}(0))$ und ε hinreichend klein:

$$|z_1 - z_2| < K_0 \cdot \varepsilon^{(1-1/k)} \Rightarrow |(R_\varepsilon)^\sigma(z_1) - (R_\varepsilon)^\sigma(z_2)| < K_2 \cdot \varepsilon^{(1-1/k)}$$

mit einer geeigneten positiven Konstanten K_1 . Zusammen mit (4) ergibt sich auf $\mathbb{P}_1 \setminus D_{r(\varepsilon)}(0)$:

$$(5) \quad |R_\varepsilon^s(z) - R^s(z)| < K_2 \cdot \varepsilon^{(1-1/k)}.$$

Wegen $k > 2$ und $m > 1$ ist $\frac{k-1}{k} > \frac{1}{km}$. Für $\alpha = \frac{1}{km}$ und ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 \in]0, \min\{\varepsilon_R(\alpha), \varepsilon_P\}[$ folgt aus (5):

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow |R_\varepsilon^s(z) - R^s(z)| < \frac{1}{2} K_2(\alpha) e^\alpha \text{ auf } \mathbb{P}_1 \setminus D_{r(\varepsilon)}(0).$$

Aus dieser Abschätzung und (2) erhalten wir mit Hilfe mit der Dreiecksungleichung:

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_R(\alpha), |z| > K_R(\alpha) \varepsilon^{-\alpha} \Rightarrow |R_\varepsilon^s(z)| < K_1(\alpha) \varepsilon^\alpha,$$

d.h. $R_\varepsilon^s(\mathbb{P}_1 \setminus D_{r(\varepsilon)}(0)) \subset G_\varepsilon$ für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

d.) Um das qc-Lemma anwenden zu können, benötigen wir die komplexe Dilatation von $g := R + \varepsilon \cdot a \cdot P$. Wir müssen $\|\mu_g\|_\infty < 1$ auf P_1 zeigen. Auf $D_{r(\varepsilon)}(0)$ und $P_1 \setminus D_{2r(\varepsilon)}(0)$ ist g holomorph, d.h. die komplexe Dilatation von g verschwindet dort. Als nächstes untersuchen wir die Ableitungen von $h := \varepsilon \cdot a \cdot P$ auf dem Kreisring $B_\varepsilon := D_{2r(\varepsilon)}(0) \setminus D_{r(\varepsilon)}(0)$. Wir haben dort

$$|h_z(z)| \leq \varepsilon \frac{1}{r(\varepsilon)} |f_z(\frac{z}{r(\varepsilon)})| \cdot |P(z)| + \varepsilon |P'(z)|$$

und

$$|h_{\bar{z}}(z)| \leq \varepsilon \frac{1}{r(\varepsilon)} |f_{\bar{z}}(\frac{z}{r(\varepsilon)})| \cdot |P(z)|.$$

f ist auf $\mathbb{C}$ stetig differenzierbar, also können wir den Betrag der Ableitungen von f nach z und $\bar{z}$ nach oben durch eine gemeinsame Konstante C_f abschätzen. P' ist ein Polynom vom Grade $m-1$, also existiert eine Konstante C_P so, daß auf $P_1 \setminus D$, also insbesondere auf B_ε ,

$$|P'(z)| \leq C_P \cdot |z|^{m-1}$$

gilt. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} |h_z(z)| &\leq \varepsilon \frac{1}{r(\varepsilon)} \cdot C_f \cdot K_P \cdot (2r(\varepsilon))^m + \varepsilon C_P \cdot (2r(\varepsilon))^{m-1} \\ &\leq C_1 \cdot \varepsilon \cdot r(\varepsilon)^{m-1} \end{aligned}$$

sowie

$$|h_{\bar{z}}(z)| \leq \varepsilon \frac{1}{r(\varepsilon)} \cdot C_f \cdot K_P \cdot (2r(\varepsilon))^m \leq C_1 \cdot \varepsilon \cdot r(\varepsilon)^{m-1}$$

mit einer geeigneten Konstanten $C_1 > 0$. Auf B_ε folgt (mit einer geeigneten Konstanten $C_2 > 0$):

$$|z^2 \cdot h_z(z)| \leq C_2 \cdot \varepsilon \cdot r(\varepsilon)^{m+1}$$

sowie

$$|z^2 \cdot h_{\bar{z}}(z)| \leq C_2 \cdot \varepsilon \cdot r(\varepsilon)^{m+1}.$$

$r(\varepsilon)$ ist proportional zu $\varepsilon^{(-1/km)}$, mit $k > 2$ und $m > 1$ erhalten wir $\|z^2 \cdot h_z(z)\|_\infty \rightarrow 0$ und $\|z^2 \cdot h_{\bar{z}}(z)\|_\infty \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$. Es gilt:

$$\mu_g(z) = \frac{h_{\bar{z}}(z)}{R'(z) + h_z(z)} = \frac{z^2 \cdot h_{\bar{z}}(z)}{z^2 \cdot R'(z) + z^2 \cdot h_z(z)}.$$

R ist nahe ∞ injektiv mit $R(\infty) \neq \infty$, also existieren positive Konstanten c_1 und c_2 mit $c_1 \leq |z^2 \cdot R'(z)| \leq c_2$ auf einer festen Umgebung von ∞ . Zusammengefaßt ergibt sich $\|\mu_g\| \rightarrow 0$ auf B_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$. Insbesondere erhält $R + \varepsilon \cdot a \cdot P$ die Orientierung. Wir setzen noch $E := \bigcup_{v=0}^{n-1} (R + \varepsilon \cdot a \cdot P)^v (G_\varepsilon)$, $N = s$ und wählen für Φ die Identität auf E . Nun können wir das qc-Lemma anwenden und erhalten eine quasikonforme Abbildung φ des $\mathbb{P}_1$ auf sich so, daß $R_\varepsilon := \varphi \circ (R + \varepsilon \cdot a \cdot P) \circ \varphi^{-1}$ eine rationale Funktion mit $\deg R = \deg(R_\varepsilon)$ ist.

e.) Wir studieren nun die kritischen Werte und periodischen Punkte von R_ε . Nach Konstruktion gilt (jeweils für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$):

- i.) ist z_0 ein nicht-repulsiver periodischer Punkt von R , so ist $\varphi(z_0)$ ein attraktiver periodischer Punkt von R_ε ,
- ii.) φ ist eine Bijektion zwischen den kritischen Werte von R_ε und denen von R und
- iii.) φ ist eine Bijektion zwischen den präperiodischen kritischen Werten von R_ε und denen von R .

Lemma II.3 liefert:

- iv.) liegt c in dem Attraktionsbereich eines attraktiven Zyklus Z von R , so liegt $\varphi(c)$ in dem Attraktionsbereich des attraktiven Zyklus $\varphi(Z)$ von R_ε .

Ist Z ein indifferenter Zyklus von R , so ist $\varphi(Z)$ ein attraktiver, aber nicht superattraktiver Zyklus von R_ε . In dessen Attraktionsbereich muß nach Theorem I.5' ein nicht-präperiodischer kritischer Punkt $\varphi(c)$ liegen. Wegen ii.) und iii.) ist c ein nicht-präperiodischer kritischer Wert von R . iv.) besagt weiterhin, daß c ein freier kritischer Wert sein muß. Also benötigt jeder indifferente Zyklus von R einen freien nicht-präperiodischen kritischen Wert von R . Das war zu zeigen.

f.) Es fehlt noch der Beweis der Hilfsaussage 4. Durch Potenzreihenentwicklung erhalten wir auf einer Umgebung U der Null eine Darstellung der Form

$$(R + \varepsilon P)^n(z) = b_1(\varepsilon)z + b_2(\varepsilon)z^2 + b_3(\varepsilon)z^3 + \dots,$$

dabei gilt (s. Beweis der Hilfsaussage 1)

$$b_1(\varepsilon) = (R^n)'(0) \cdot (1 + \varepsilon \beta_1 + \varepsilon^2 \beta_2 + \dots + \varepsilon^n \beta_n)$$

mit Konstanten β_ν ; nach Konstruktion ist $\beta_1 < 0$. Wir suchen eine Funktion

$$\psi_\varepsilon(z) = z + c_2(\varepsilon)z^2 + c_3(\varepsilon)z^3 + \dots$$

mit $(\psi_\varepsilon \circ ((R + \varepsilon P)^n) \circ \psi_\varepsilon^{-1})(z) = b_1(\varepsilon) \cdot z$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir (s. [Cr], S. 153)

$$c_\mu(\varepsilon) = \frac{P_\mu(b_1(\varepsilon), b_2(\varepsilon), \dots, b_\mu(\varepsilon))}{(b_1(\varepsilon))^{\mu-1} \cdot (1-b_1(\varepsilon)) \cdot \dots \cdot (1-b_1(\varepsilon))^{\mu-1}}$$

mit gewissen Polynomen P_μ . Wegen $(R^n)'(0) = e^{2\pi i \tau}$ mit $\tau \notin \mathbb{Q}$ existiert zu jedem $M \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Zahl $\varepsilon'_M > 0$ mit $0 \neq (b_1(\varepsilon))^\mu \neq 1$ für $\mu = 1, \dots, M$ und $|\varepsilon| < \varepsilon'_M$; dann sind die Koeffizienten $c_2(\varepsilon), \dots, c_\mu(\varepsilon)$ wohldefiniert. Wir setzen

$$\psi_M(\varepsilon, z) := z + c_2(\varepsilon) \cdot z^2 + \dots + c_M(\varepsilon) \cdot z^M$$

und

$$\varphi_M(\varepsilon, \cdot) := \psi_M(\varepsilon, \cdot) \circ (R + \varepsilon P)^n \circ (\psi_M(\varepsilon, \cdot))^{-1}.$$

Für festes M und ε'_M hinreichend klein sind für $\varepsilon \in B_M := \{\varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| < \varepsilon'_M\}$ die Funktionen $\psi_M(\varepsilon, \cdot)$ auf einer (nur von M abhängigen) Umgebung U'_M der Null definiert und biholomorph. Außerdem gilt dann $\psi_M \in \mathcal{O}(B_M \times U'_M)$. φ_M besitzt die Potenzreihenentwicklung

$$\varphi_M(\varepsilon, z) = b_1(\varepsilon) \cdot z + d_{M, M+1}(\varepsilon) \cdot z^{M+1} + \dots$$

Für festes M existiert eine Umgebung $U_M \subset U'_M$ der Null so, daß $\varphi_M \in \mathcal{O}(B_M \times U_M)$ ist. Wir schreiben $\delta'_M := \frac{1}{2} d_E(\partial U_M, 0)$. Dann gilt für geeignete Konstanten $C_1(M), C_2(M) > 0$ und $0 < \varepsilon_1(M) < \varepsilon'_M$ auf $]0, \varepsilon_1(M)[\times D_{\delta'_M}(0)$:

$$|d_{M,M+1} + d_{M,M+2} \cdot z + \dots| \leq C_1(M)$$

sowie

$$|b_1(\varepsilon)| \leq 1 - \varepsilon \cdot C_2(M).$$

Für $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(M)$ und $|z| < \delta_M := \frac{M-1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{C_2(M)}{C_1(M)}} < \delta'_M$ erhalten wir

$$|\varphi_M(\varepsilon, z)| \leq |z|.$$

D.h. die Kreisscheibe $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta_M\}$ ist invariant unter $\varphi_M(\varepsilon, \cdot)$ und $\psi_M(\varepsilon, D)$ ist invariant unter $(R + \varepsilon P)^n$, also Teilmenge des Attraktionsbereiches von 0 bezüglich $(R + \varepsilon P)^n$. Die Holomorphie von ψ_M und die Biholomorphie von $\psi_M(\varepsilon, \cdot)$ liefert zu jedem M die Existenz einer Konstanten $K_1(M) > 0$ mit:

$$K_1(M) \cdot \varepsilon^{1/(M-1)} \leq |\psi_M(\varepsilon, z)|$$

für $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(M)$ und $z \in \partial D$. Insbesondere erhalten wir für $\alpha > \frac{1}{M-1}$ die Ungleichung $\rho(\varepsilon) > K_1(M) \cdot \varepsilon^\alpha$ und somit die Hilfsaussage. $\square$

§ 5. Verwandlung von Herman-Ringen in Siegel-Scheiben

Shishikura beschreibt in seiner bereits mehrfach erwähnten Arbeit eine Methode, mit der man aus zwei rationalen Funktionen R_1 und R_2 mit jeweils einer Siegel-Scheibe eine neue rationale Funktion R mit einem Herman-Ring H konstruieren kann. Weiterhin führte er aus, wie dieser Prozeß auch umgekehrt werden kann. Im nächsten Abschnitt skizzieren wir die Konstruktion der Funktion R und im Abschnitt b.) die Umkehrung.

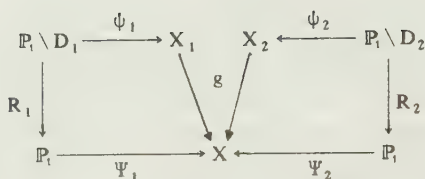
Dabei benötigen wir die Tatsache, daß H invariant unter R ist. Falls aber ein Zyklus (der Ordnung m) von Herman-Ringen vorliegt, ist die Situation komplizierter. Wir müssen dann nämlich $2m$ rationale Funktionen konstruieren. Dazu benötigen wir Shishikuras Idee der n -Stücke, die wir im Abschnitt c.) erläutern werden. Der Abschnitt d.) ist dann dem Beweis der zweiten Aussage von Theorem III.2' gewidmet.

a.) Konstruktion einer rationalen Funktion mit einem Herman-Ring

R_1 und R_2 seien rationale Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- i.) 0 sei ein linearisierbarer irrational indifferenter Fixpunkt von R_1 und R_2 ,
- ii.) $a := R_1'(0) = -R_2'(0)$.

Wir bezeichnen die Siegel-Scheibe von R_t um 0 mit S_t und wählen noch jeweils eine invariante analytische Kurve $\Gamma_t \subset S_t$. R_t ist auf Γ_t via einem analytischen Diffeomorphismus $\varphi_t: \Gamma_t \rightarrow \partial\mathbb{D}$ konjugiert zu der Rotation $z \mapsto az$ bzw. $z \mapsto -az$. D_t bezeichne die Komponente von $\mathbb{P}_t \setminus \Gamma_t$, die den Nullpunkt enthält. $\mathbb{P}_t \setminus D_t$ ist eine Riemannsche Fläche mit dem Rand Γ_t . Heftet man die Ränder dieser Flächen zusammen, indem zwei Punkte $z_1 \in \Gamma_t$ genau dann identifiziert werden, wenn $\varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2)$ ist, so erhält man eine Fläche X , die homöomorph zu $\mathbb{P}_t$ ist. Die Kurven Γ_t gehen dabei in eine Jordankurve $\Gamma \subset X$ über. Letztere zerlegt X in zwei berandete Flächen X_1 und X_2 . X_t ist natürlich zu $\mathbb{P}_t \setminus D_t$ homöomorph; es sei ψ_t ein orientierungserhaltender Homöomorphismus von $\mathbb{P}_t \setminus D_t$ auf X_t mit $\psi_t|_{\partial D_t} \equiv \varphi_t$. X ist homöomorph zu $\mathbb{P}_t$, somit existieren Fortsetzungen Ψ_t von ψ_t , die $\mathbb{P}_t$ homöomorph und orientierungserhaltend auf X abbilden. Wir konstruieren nun eine Abbildung $g: X \rightarrow X$: Auf X_t setzen wir $g \equiv \Psi_t \circ R_t \circ \psi_t^{-1}$.



Nach Konstruktion ist g auch auf Γ wohldefiniert. Bei geschickter Wahl der ψ_i kann auf $\Psi_1 \circ g \circ \Psi_1^{-1}$ das qc-Lemma angewendet werden und man erhält eine zu g äquivalente rationale Funktion R . Diese besitzt einen Herman-Ring H , jede Komponente von ∂H entspricht einem Rand ∂S_i .

b.) Verwandlung eines Herman-Ringes

Eine rationale Funktion R besitze einen (invarianten) Herman-Ring H . Wir wählen eine invariante Kurve Γ_1 in H (insbesondere ist Γ_1 eine analytische Kurve) und bezeichnen mit G_1 und G'_2 die Komponenten von $\mathbb{P}_1 \setminus \Gamma_1$. Es existiert eine biholomorphe Abbildung $f_1: G_1 \rightarrow \Delta := \mathbb{P}_1 \setminus \bar{D}$. Wir wählen eine weitere invariante Kurve Γ_2 in $H \cap G'_2$. Es sei G_2 die in G'_2 enthaltene Komponente von $\mathbb{P}_1 \setminus \Gamma_2$ und f_2 eine biholomorphe Abbildung von G_2 auf $D_\rho(0)$ mit einer Zahl $0 < \rho < 1$. Die Funktionen f_i sind noch auf Γ_i stetig (sogar aus $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_i)$) und konjugieren R dort zu einer Rotation $z \mapsto \pm a \cdot z$. Dabei ist a die Rotationszahl des Herman-Ringes H . Γ_1 und Γ_2 können so gewählt werden, daß $\mathbb{P}_1 \setminus (G_1 \cup G_2)$ keinen Nachfolger eines kritischen Wertes von R enthält. D.h. für jeden kritischen Wert c von R gilt stets $R^m(c) \notin \mathbb{P}_1 \setminus (G_1 \cup G_2)$. Wir wählen eine gemeinsame $\mathcal{C}^\infty$ -Fortsetzung $f: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ von f_1 und f_2 mit folgenden Eigenschaften:

i.) $f|_{G_i} \equiv f_i$ und

ii.) $f|_{\bar{G}'_2 \setminus G_2}$ ist ein Homöomorphismus von $\bar{G}'_2 \setminus G_2$ auf $\bar{D} \setminus D_\rho(0)$.

Wir definieren nun eine neue Abbildung g_1 durch:

$$g_1: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; z \mapsto \begin{cases} a \cdot z & \text{auf } D_\rho(0) \\ (f \circ R \circ f^{-1})(z) & \text{auf } \mathbb{P}_1 \setminus D_\rho(0). \end{cases}$$

Diese Funktion genügt den Voraussetzungen des qc-Lemmas! Um dies einzusehen, setzen wir $E := E_1 \cup E_2$ mit $E_1 := \overline{D_\rho(0)}$ und $E_2 := \mathbb{D} \setminus \overline{D_\rho(0)}$ sowie $\Phi|_{E_1} \equiv \text{id}$ und $\Phi|_{E_2} \equiv f$. Mit $N = 1$ können wir das qc-Lemma anwenden. Also existiert eine qc-Abbildung φ_1 des $\mathbb{P}_1$ auf sich so, daß $R_1 := \varphi_1^{-1} \circ g_1 \circ \varphi_1$ eine rationale Funktion ist. Auf $\varphi_1(\mathbb{D})$ ist R_1 konjugiert zu einer Rotation, d.h. $\varphi_1(\mathbb{D})$ ist in einer Siegel-Scheibe von R_1 mit der Rotationszahl a enthalten. Vertauscht man die Rollen von G_1 und G_2 , so erhält man eine weitere rationale Funktion R_2 , die ebenfalls eine Siegel-Scheibe, allerdings mit der Rotationszahl $-a$, besitzt.

c.) Das Konzept der n-Stücke

Die rationale Funktion R besitze einen Zyklus H von Herman-Ringen: H zerfällt also in paarweise disjunkte, zweifach zusammenhängende Gebiete $H_1, \dots, H_m$. R^m ist auf jeden H_μ konjugiert zu einer Rotation $z \mapsto a \cdot z$ mit einer von μ unabhängigen Rotationszahl $a \in \partial\mathbb{D}$. Wir wählen eine periodische Kurve $\gamma_1 \subset H_1$ und setzen $\gamma_\mu := R^\mu(\gamma_1)$ sowie $\Gamma := \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m$. Weil R nur endlich viele kritische Punkte besitzt, können wir o.B.d.A. annehmen, daß ein $\delta > 0$ existiert mit $d(R^n(c), \Gamma) > \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und jeden kritischen Punkt c von R . Die γ_μ sind jeweils analytische Jordan-Kurven. Für ein (beliebiges) $n \in \mathbb{N}$ nennen wir die Komponenten von $\mathbb{P}_1 \setminus R^{-n}(\Gamma)$ *n-Stücke*. Wir setzen noch:

$$X_p := \left\{ \{z_0\} : z_0 \text{ ist nicht-repulsiver periodischer Punkt von } R \right\},$$

$$X_H := \left\{ \text{alle Komponenten von } H \setminus \Gamma \right\},$$

$$X_c := \left\{ \{c\} : c \text{ ist kritischer Punkt von } R \right\},$$

$$X'_c := \left\{ \{R^n(c)\} : n \in \mathbb{N}, c \in X_c, c \text{ liegt im Attraktionsbereich eines attraktiven Zykels von } R \right\}$$

$$X := X_p \cup X_H \cup X_c \cup X'_c.$$

Die Elemente von X_H wollen wir Halbringe nennen. Alle Elemente von X sind Teilmengen des $\mathbb{P}_1$; sie enthalten gerade die uns interessierenden Objekte, nämlich:

- die periodischen nicht-repulsiven Punkte von R
- die Halbringe
- die kritischen Punkte sowie jene Teile ihrer Vorwärtsorbits, die von Bedeutung sind.

Im folgenden sagen wir, daß zwei Elemente x_1 und x_2 aus X durch n getrennt werden, wenn sie in verschiedenen n -Stücken liegen. Wir wählen nun eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß jeweils zwei Elemente aus X , die durch irgendein n getrennt werden können, schon durch N getrennt werden. X_p ist nach der bereits bewiesenen Ungleichung i.) aus Theorem III.2' endlich, X_c ist endlich, weil R nur endlich viele kritische Punkte besitzt. X_H enthält nach Konstruktion genau $2m$ Elemente. Probleme bereitet X'_c , denn die Vorwärtsorbits sind in der Regel **nicht** endlich. Aber in X'_c sind nur die kritischen Punkte enthalten, die im Attraktionsbereich eines attraktiven Zyklus (der Ordnung $v \in \mathbb{N}$) liegen. Zu jedem solchen kritischen Punkt existiert ein $n(c)$ so, daß $R^n(c)$ für $n > n(c)$ in dem sofortigen Attraktionsbereich liegt. Dieser besteht aber aus endlich vielen Komponenten, die alle periodisch und in $\mathbb{P}_1 \setminus \bigcup_{\mu \in \mathbb{N}} R^{-\mu}(H) \subset \mathbb{P}_1 \setminus \bigcup_{\mu \in \mathbb{N}} R^{-\mu}(\Gamma)$ enthalten sind. Zur Ermittlung der Zahl N reicht es also aus, zu jedem kritischen Punkt c aus X'_c die Punkte $R^n(c)$ mit $0 \leq n \leq n(c) + v$ zu berücksichtigen. Somit existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, daß jeweils zwei Elemente durch N getrennt werden, die durch ein $n \in \mathbb{N}$ getrennt werden können. Wählen wir N minimal, so ist N wohldefiniert. Wir benötigen später das

Lem III.8 *Liegen zwei Elemente x_1 und x_2 von X in demselben N -Stück, so auch $R(x_1)$ und $R(x_2)$.*

Beweis: x_1 und x_2 können nicht durch $N+1$ getrennt werden, d.h. es existiert ein Jordanbogen γ in $\mathbb{P}_1 \setminus R^{-(N+1)}(\Gamma)$, der in x_1 beginnt und in x_2 endet. $R(\gamma)$ verbindet $R(x_1)$ mit $R(x_2)$ und liegt in $\mathbb{P}_1 \setminus R^{-N}(\Gamma)$, d.h. $R(x_1)$ mit $R(x_2)$ sind Teilmengen desselben N -Stückes. $\square$

$R^{-N}(\Gamma)$ zerfällt in endlich viele Komponenten, also ist jedes N -Stück G endlich zusammenhängend; jede Komponente von $\mathbb{P}_1 \setminus G$ enthält mehr als einen Punkt. Also existiert eine biholomorphe Abbildung f von G auf ein Kreisgebiet D . f kann so gewählt werden, daß $\infty \in D$ ist. Die Komponenten von $\mathbb{P}_1 \setminus \bar{D}$ sind offene Kreisscheiben $D_\nu := D_{r_\nu}(z_\nu)$ mit $0 < r_\nu < \infty$; die Abschlüsse $\bar{D}_\nu$ sind paarweise disjunkt.

d.) Beweis der Aussage ii.) von Theorem III.2'

Wir fixieren ein N -Stück G_0 mit $x \in G_0$ für ein $x \in X_P \cup X_H$. Es sei $M := \min\{\mu \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid R^\mu(x) \subset G_0\}$. M ist wohldefiniert, weil $X_P \cup X_H$ nur periodische Objekte enthält. Nach Lemma III.8 gilt $R^M(x) \subset G_0$ für jedes $x \in X$ mit $x \in G_0$. Also muß M stets ein Teiler der Periode eines beliebigen Objektes $x \in (X_P \cup X_H)$ mit $x \in G_0$ sein. Es existieren N -Stücke $G_1, \dots, G_{M-1}$ mit: $x \in X$ und $x \in G_0 \Rightarrow R^\mu(x) \subset G_\mu$ für $m=1, \dots, M-1$. Wie oben erhalten wir $R^M(x) \subset G_\mu$ für jedes $x \in X$ mit $x \in G_\mu$ bzw. daß M stets ein Teiler der Periode eines beliebigen Objektes $x \in (X_P \cup X_H)$ mit $x \in G_\mu$ ist. Wir vereinbaren noch $G_M := G_0$ sowie $G := G_0 \cup \dots \cup G_{M-1}$ und setzen

$$m_i := \#\{x \in X_P : x \in G_0 \text{ ist ein indifferenter periodischer Punkt}\},$$

$$m_H := \#\{x \in X_H : x \in G_0\},$$

$$m_c := \#\{x \in X_c : x \in G\} \quad \text{und}$$

$$m'_c := \#\left\{x \in X_c : x \in G \text{ und } x \text{ liegt im Attraktionsbereich eines attraktiven Zyklus oder ist präperiodisch}\right\}.$$

Nach dem oben gesagten ist die Anzahl der in G enthaltenen indifferenten periodischen Punkte von R^M gerade $M \cdot m_1$.

Wir benötigen noch Bezeichnungen für die Komponenten des Komplements von G_μ : Für diese schreiben wir $G_{\mu,\nu}$ mit $\nu = 1, \dots, m_\mu$.

Wie in Abschnitt b.) konstruieren wir mit Hilfe der quasikonformen Chirurgie im nächsten Abschnitt Abbildungen $f_0, \dots, f_{M-1}$ des $\mathbb{P}_1$ auf sich mit folgenden Eigenschaften (dabei sei $f_M := f_0$ und $F_\mu := f_{\mu-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_M \circ \dots \circ f_\mu$):

$$(f1) \quad f_\mu|_{G_\mu} \equiv R|_{G_\mu},$$

$$(f2) \quad G_{\mu+1} \subsetneq f_\mu(G_\mu),$$

$$(f3) \quad f_\mu(\mathbb{P}_1 \setminus G_\mu) \subset \mathbb{P}_1 \setminus G_{\mu+1},$$

$$(f4) \quad \partial G_{\mu,\nu} \subset H \Rightarrow G_{\mu,\nu} \text{ liegt in einer Siegel-Scheibe von } F_\mu \text{ und}$$

$$(f5) \quad c \in \mathbb{P}_1 \setminus G_\mu \text{ ist kritischer Wert von } f_\mu \Rightarrow c \text{ ist präperiodisch unter } F_\mu.$$

Dann gelten:

$$(F1) \quad F_\mu|x \equiv R^M|x \text{ für } x \in (X_P \cup X_H) \text{ mit } x \in G_\mu \text{ und}$$

$$(F2) \quad F_\mu(\mathbb{P}_1 \setminus G_\mu) \subset \mathbb{P}_1 \setminus G_\mu.$$

Auf die Funktion F_μ kann jeweils das qc-Lemma angewendet werden und man erhält via quasikonformer Konjugation rationale Funktionen R_μ . Wir zählen deren kritischen Werte:

Die kritischen Punkte von f_μ entstehen aus den kritischen Punkten von R . Somit besitzen die f_μ 's zusammen m_c kritische Werte, die aus den in G gelegenen kritischen Punkten von R entstanden sind. Jedes F_μ ist nach Konstruktion ein Kompositum aller f_μ , besitzt also genau m_c kritische Werte. Somit besitzt jedes R_μ mindestens m_c kritische Werte. Von diesen liegen m'_c im Attraktionsbereich attraktiver Zyklen oder sind präperiodisch. Falls aus einem weiteren (nicht in G enthaltenen) kritischen Punkt von R ein kritischer Wert von R_μ wird, so ist dieser nach (f5) präperiodisch. Für die indifferenten Zyklen von R_μ stehen somit nur $m_c - m'_c$ kritische Werte zur Verfügung - diese entsprechen genau den freien nicht-präperiodischen kritischen Punkten von R , die in G liegen.

Aus jedem in G enthaltenem indifferenten Zyklus (der Ordnung $k \cdot M$) von R^M wird ein indifferenter Zyklus (der Ordnung k) von R_μ ; jedes R_μ besitzt somit (mindestens) m_i indifferente Zyklen. Nach (f4) werden die in G_0 liegenden Halbringe zu Siegelscheiben, also besitzt jedes R_μ weitere m indifferente periodische Punkte; weil diese aus einem periodischen Objekt von R (nämlich einem Halbring) hervorgegangen sind, bilden sie einen Zyklus. Zusammen erhalten wir für jedes R_μ genau $m_i + 1$ indifferente Zyklen.

Die erste Aussage von Theorem III.2' liefert nun die Ungleichung:

$$m_i + 1 \leq m_c - m'_c.$$

Führt man diesen Prozeß für alle N -Stücke, die einen Halbring oder einen indifferenten periodischen Punkt enthalten durch, so ergibt sich durch Summation (man beachte, daß aus einem Herman-Ring zwei periodische Halbringe entstehen, die in verschiedenen N -Stücken enthalten sind):

$$n_i + 2 \leq d'.$$

Diese Ungleichung wird offensichtlich falsch, wenn bereits $n_i = d'$ gilt; Widerspruch.

e.) Konstruktion der Funktionen f_μ

Mit f_μ bezeichnen wir wie in Abschnitt c.) die biholomorphe Abbildung von G_μ auf ein Kreisgebiet $D_\mu := \mathbb{P}_1 \setminus \left(\bigcup_\nu D_{r_{\mu,\nu}} \right)$; dabei sind für festes μ die abgeschlossenen Kreisscheiben $\overline{D_{r_{\mu,\nu}}}$ paarweise disjunkt. Wir wählen eine invariante Kurve γ' in $H \setminus \overline{G_0}$ und schreiben $\Gamma' := \bigcup_{\mu=1}^M R^\mu(\gamma')$ für $\mu = 1, \dots, M$. Wir können $d(\Gamma', \Gamma) < \delta$ annehmen. Nach der Definition von δ (s. Beginn von Abschnitt c.)) bedeutet dieses, daß "zwischen" Γ und Γ' kein Element der Orbits der kritischen Punkte liegt. Mit $G'_{\mu,\nu}$ bezeichnen wir die in $G_{\mu,\nu}$ liegende Komponente von $\mathbb{P}_1 \setminus R^{-N}(\Gamma)$. Nach Konstruktion ist $G'_{\mu,\nu}$ einfach zusammenhängend, also existieren biholomorphe Abbildungen $f_{\mu,\nu}$ von $G'_{\mu,\nu}$ auf $D_{\mu,\nu} := D_{r'_{\mu,\nu}}(0)$ mit Zahlen $r'_{\mu,\nu} \in]0, r_{\mu,\nu}[$. Das Urbild der Null legen wir später fest.

Die Abbildung $R|(G_{\mu,\nu} \setminus \overline{G'_{\mu,\nu}}) : (G_{\mu,\nu} \setminus \overline{G'_{\mu,\nu}}) \rightarrow R((G_{\mu,\nu} \setminus \overline{G'_{\mu,\nu}}))$ ist eine eigentliche Abbildung, ihren Abbildungsgrad bezeichnen wir mit $d_{\mu,\nu}$. Auf $G'_{\mu,\nu}$ definieren wir $f_{\mu}(z) := f_{\mu,\nu}^{-1}((f_{\mu,\nu}(z))^{d_{\mu,\nu}})$. Wir setzen nun f_{μ} so zu einer $\mathcal{C}^1$ -Funktion auf $\mathbb{P}_1$ fort, daß die Fortsetzung $G_{\mu,\nu} \setminus \overline{G'_{\mu,\nu}}$ homöomorph auf $R((G_{\mu,\nu} \setminus \overline{G'_{\mu,\nu}}))$ abbildet.

Die Funktionen $f_{\mu,\nu}$ können so gewählt werden, daß alle kritischen Werte von f_{μ} , die in den $G_{\mu,\nu}$ liegen, präperiodisch werden – diese Punkte sind nämlich jeweils das Urbild der Null unter $f_{\mu,\nu}$.

§ 6. Ample Teilmengen der kritischen Werte

In dem sechsten Kapitel benötigen wir holomorphe Parametrisierungen von Siegel-Scheiben. Lösungen zu diesem Problem wurden bereits 1983 von Sullivan (s. Theorem III.11) sowie 1986 von Pommerenke und Rodin (s. Theorem III.10) veröffentlicht. Letzere benutzten dabei das Konzept der amplen Teilmengen der kritischen Punkte:

Definition III.3 Eine Teilmenge T der kritischen Punkte (Werte) einer rationalen Funktion heißt ample, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i.) Kein Element von T ist präperiodisch,
- ii.) Die Orbits der Elemente von T sind alle paarweise disjunkt,
- iii.) T ist bezüglich der Eigenschaften i.) und ii.) maximal.

Anmerkung : Zu einer rationalen Funktion können mehrere ample Teilmengen der (freien) kritischen Punkte (Werte) existieren. Die Kardinalität einer solchen Menge T hängt aber nicht von der speziellen Wahl für T ab, sondern nur von R .

Wir können nun ein weiteres Resultat zur Anzahl der indifferenten Zyklen herleiten. Wir betrachten dazu eine rationale Funktion R , sowie eine ample Teilmenge T ihrer freien kritischen Werte. Die Kardinalität von T sei gleich d'' . Es gilt stets $d'' \leq d'$, wobei d' wie in Theorem III.2' die Anzahl der nicht-präperiodischen freien kritischen Werte von R ist. Wir studieren den Fall $d'' < d'$. Dann gibt es kritische Werte, deren Orbits nicht disjunkt sind. In diesem Fall ergänzen wir in § 4 die Forderungen an das Polynom P durch folgende Bedingung:

(P5) Existieren zu zwei kritischen Werte c_1 und c_2 von R Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $R^{n_1}(c_1) = R^{n_2}(c_2)$, so gelte $P(R^v(c_t)) = 0$ für $t = 1, 2$ und $v = 1, \dots, n_t$.

Dann sind c_1 und c_2 kritische Werte von $g := R + \varepsilon \cdot a \cdot P$ und es gilt $g^{n_1}(c_1) = g^{n_2}(c_2)$. Wie in § 4 konstruieren wir eine qc-Abbildung φ und eine rationale Funktion R_ε mit $R_\varepsilon \circ \varphi \equiv \varphi \circ g$. Dann sind $\varphi(c_1)$ und $\varphi(c_2)$ kritische Werte von R_ε mit $(R_\varepsilon)^{n_1}(\varphi(c_1)) = (R_\varepsilon)^{n_2}(\varphi(c_2))$. Somit liegen $\varphi(c_1)$ und $\varphi(c_2)$ im Attraktionsbereich desselben attraktiven Zyklus von R_ε (der aus einem indifferenten Zykel von R entstanden ist). Weil in dem Attraktionsbereich jedes attraktiven Zyklus ein kritischer Wert liegen muß, kann R_ε nur d'' attraktive Zyklen, die aus indifferenten Zyklen von R entstanden sind, besitzen. Wir erhalten das

Korollar III.2 n_i bezeichne die Anzahl der indifferenten Zyklen einer rationalen Funktion R , d' die der freien kritischen Werte und d'' die Kardinalität einer amplen Teilmenge der freien kritischen Werte von R .

i.) Es gilt stets $n_i \leq d''$.

ii.) Ist $n_i = d'$, so besitzen die freien kritischen Werte paarweise disjunkte Orbits.

Wir wenden uns nun der oben erwähnten holomorphen Parametrisierung von Siegel-Scheiben zu. Pommerenke und Rodin bewiesen das

Theorem III.10 ([PR], Theorem 6, S. 20) *Es sei $\mathcal{R} : D_\delta(0) \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ eine holomorphe Familie rationaler Funktionen R_μ vom festen Grade $d \geq 2$, die jeweils eine Siegel-Scheibe G_μ besitzen. Weiterhin existiere ein $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sowie Funktionen $\zeta, c_1, \dots, c_N \in \mathcal{O}(D_\delta(0))$ mit:*

- i.) $\zeta(\mu)$ ist für $\mu \in D_\delta(0)$ das Zentrum der Siegel-Scheibe G_μ ,
- ii.) $c_1(\mu), \dots, c_N(\mu)$ sind für $\mu \in D_\delta(0)$ kritische Punkte von R_μ ,
- iii.) die Menge $\{c_1(\mu), \dots, c_N(\mu)\}$ ist für $\mu \in D_\delta(0)$ ample.

Dann existiert eine Funktion $\Phi \in \mathcal{O}(D_\delta(0) \times \mathbb{D})$ mit:

- i.) $\Phi(\mu, 0) = \zeta(\mu)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(\mu, 0) > 0$ auf $D_\delta(0)$ und
- ii.) $\Phi(\mu, \cdot)$ bildet $\mathbb{D}$ biholomorph auf G_μ ab.

Nach Koordinatentransformation können wir $\zeta(\mu) = z_0 = 0$ für alle $\mu \in D_\delta(0)$ annehmen.

Die Funktion Φ ist die gesuchte holomorphe Parametrisierung von Siegel-Scheiben. Für den Beweis benötigten Pommerenke und Rodin das Resultat von Sullivan:

Theorem III.11 ([SIII], Theorem 3, S. 19) *Für $\mu \in D_\delta(0)$ sei Φ_μ die holomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ auf G_μ , normiert durch $\Phi_\mu(0) = z_0$ und $\lim_{t \nearrow 1} \Phi_\mu(t) = \xi_\mu^*$ mit einem erreichbaren Randpunkt $\xi_\mu^* \in \partial G_\mu$. Falls die Funktion $\mu \mapsto \xi_\mu^*$ holomorph auf $D_\rho(0)$ ist und es abzählbar unendlich viele Funktionen $\xi_t \in \mathcal{O}(D_\delta(0))$ gibt mit $\xi_t(\mu) \in G_\mu$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t(\mu) = \xi_\mu^*$, so ist die Funktion $\Phi : D_\delta(0) \times \mathbb{D} ; (\mu, z) \mapsto \Phi_\mu(z)$ holomorph (in beiden Variablen).*

Wir werden im fünften Kapitel eine holomorphe Familie $\mathcal{R}: D_r(0) \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}_1$ rationaler Funktionen R_μ mit folgenden Eigenschaften studieren:

- (R1) die Anzahl der indifferenten Zyklen von R_μ ist für alle $\mu \in D_r(0)$ gleich n_i mit einer von μ unabhängigen Zahl $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
- (R2) R_μ besitzt für alle $\mu \in D_r(0)$ genau n_i freie kritische Werte, und deren Vielfachheiten sind unabhängig von μ sowie
- (R3) mindestens ein Zyklus von R_0 besteht aus linearisierbaren irrational indifferenten periodischen Punkten.

Wir wollen nun zeigen, daß für alle $\mu \in D_r(0)$ die Funktion R_μ einen Zyklus linearisierbarer periodischer Punkte besitzt und daß die entsprechenden Siegel-Scheiben holomorph parametrisiert werden können. Wir wissen bereits, daß irrational indifferente Zyklen mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen parametrisiert werden können. Also existieren für $v=1, \dots, n_i$ holomorphe Funktionen $Z_v: D_r(0) \rightarrow \mathbb{P}_1^{m_v}$ mit:

- i.) $Z_v(\mu)$ ist für alle $\mu \in D_r(0)$ ein indifferenter Zyklus der Ordnung m_v von R_μ ; die Ableitung von $(R_\mu)^{m_v}$ in den Elementen der Zyklen $Z_v(\mu)$ hängt nicht von μ ab.
- ii.) Für jedes $\mu \in D_r(0)$ sind die Mengen $Z_v(\mu)$ (aufgefaßt als m_v -elementige Teilmenge von $\mathbb{P}_1$) paarweise disjunkt.

(Wir werden auch im folgenden $Z_v(\mu)$ sowohl als Element des $\mathbb{P}_1^{m_v}$ als auch als m_v -elementige Teilmenge von $\mathbb{P}_1$ betrachten.) Weil die freien kritischen Werte $c_v(\mu)$ der Funktion R_μ konstante Vielfachheit m'_v besitzen, existiert genau ein kritischer Punkt $c'_v(\mu)$ mit $R_\mu(c'_v(\mu)) = c_v(\mu)$ so, daß $c'_v(\mu)$ ist stets einfache Nullstelle der m'_v -ten Ableitung von R_μ ist. Also kann $c'_v(\mu)$ und somit $c_v(\mu)$ nach dem Satz über implizite Funktionen ebenfalls holomorph parametrisiert werden. Wir erhalten $c'_v, c_v \in \mathcal{O}(D_r(0))$ für $v=1, \dots, n_i$.

Aus (R1) und (R2) folgt mit Korollar III.9, daß für alle $\mu \in D_r(0)$ die Menge der freien kritischen Werte ample ist. Damit sind fast alle Voraussetzungen von Theorem III.10 erfüllt. Wir wissen aber nicht, ob es eine holomorphe Funktion $\zeta: D_r(0) \rightarrow \mathbb{P}_1$ gibt so, daß $\zeta(\mu)$ ein **linearisierbarer** periodischer Punkt von R_μ ist. Wir werden aber sehen, daß unter den Voraussetzungen (R1) bis (R3) ein Zyklus $Z_v(0)$ genau dann aus linearisierbaren periodischen Punkten besteht, wenn $Z_v(\mu)$ für alle $\mu \in D_\rho(0)$ aus solchen Punkten besteht (mit einem geeignetem $\rho \in]0, r[$):

Theorem III.12 *Es sei $\mathcal{R}: D_r(0) \times D \rightarrow \mathbb{P}_1$ eine holomorphe Familie rationaler Funktionen R_μ , die den Voraussetzungen (R1) und (R2) genügt. Dann existiert ein $\rho \in]0, r[$ mit:*

- i.) *Ist $\zeta(0)$ ein linearisierbarer periodischer Punkt der Ordnung m von R_0 und $\zeta \in \mathcal{O}(D_\rho(0))$ die holomorphe Parametrisierung dieses Punktes, so ist $\zeta(\mu)$ für alle $\mu \in D_\rho(0)$ linearisierbar.*
- ii.) *Die Siegelscheiben G_μ von R_μ mit $\zeta(\mu)$ als Zentrum können $D_\rho(0)$ holomorph parametrisiert werden.*

Wir erhalten also das Ergebnis aus Theorem III.10 unter schwächeren Voraussetzungen. Insbesondere benötigen wir nicht mehr dessen Voraussetzung i.). Deren Nachweis aber ist oft schwer, manchmal sogar unmöglich. Er gelang Yoccoz in dem Fall, daß $(R_0^m)'(\zeta(\mu))$ der in Theorem I.8 erwähnten zahlentheoretischen Bedingung genügt (dabei sei m die Ordnung des periodischen Punktes $\zeta(\mu)$). Yoccoz bewies weiterhin in [Y2], daß die linearisierbaren Fixpunkte von quadratischen Polynomen stets der Brjuno-Bedingung genügen. Für beliebige rationale Funktionen jedoch ist die Frage, ob bei kleiner Störung aus linearisierbaren indifferenten periodischen Punkten wieder linearisierbare periodische Punkte entstehen, noch offen. Unser Theorem III.12 liefert hierzu einen Beitrag. Wir wenden uns nun dem Beweis zu.

Beweis: a.) Beweisskizze: Mit Hilfe des λ -Lemmas konstruieren wir zunächst quasikonforme Abbildungen des $\mathbb{P}_1$ auf sich, die die Orbits der freien kritischen Werte von R_0 auf die Orbits der freien kritischen Werte von R_μ abbilden. Im nächsten Schritt zeigen wir, daß das Bild der Siegel-Scheibe von R_0 mit Zentrum $\zeta(0)$ unter diesen qc-Abbildungen stets eine Teilmenge der Fatou-Menge von R_μ ist. Also ist $\zeta(\mu)$ ein linearisierbarer periodischer Punkt. Im letzten Schritt wenden wir wie Pommerenke und Rodin das Theorem III.11 an und erhalten die gesuchte holomorphe Parametrisierung der Siegel-Scheiben.

b.) Anwendung des λ -Lemmas: Wir bezeichnen wie oben die freien kritischen Werte mit $c_\chi(\mu)$ (mit $\chi=1, \dots, n_1$). Für $\mu \in D_r(0)$ setzen wir

$$E_\mu := \{(R_\mu)^\nu(c_\chi(\mu)) : \nu \in \mathbb{N} \text{ und } \chi=1, \dots, n_1\} \cup \{\zeta(0)\}$$

und studieren die Abbildung $f: D_r(0) \times E_0 \rightarrow \mathbb{P}_1$, die durch $f(\mu, \zeta(\mu)) := \zeta(\mu)$ und $f(\mu, (R_0)^\nu(c_\chi(0))) := (R_\mu)^\nu(c_\chi(\mu))$ definiert ist. Weil $\mathcal{R}$ und c_χ holomorphe Funktionen sind, ist für alle $z \in E_0$ auch $f(\cdot, z) \in \mathcal{O}(D_r(0))$. Weiterhin gilt offenbar $f(0, \cdot) \equiv \text{id}|_{E_0}$. Aus (R1) und (R2) folgt mit Korollar III.9, daß die Menge $T_\mu := \{c_1(\mu), \dots, c_{n_1}(\mu)\}$ eine ample Menge der freien kritischen Werte ist. D.h. keiner der freien kritischen Werte ist präperiodisch und ihre Orbits sind paarweise disjunkt. Also ist $f(\mu, \cdot)$ für alle $\mu \in D_r(0)$ injektiv. Somit sind die Voraussetzungen des λ -Lemmas erfüllt und demnach besitzt f eine Fortsetzung $F: D_\rho(0) \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ mit $\rho \leq \frac{1}{3}r$. Wählen wir $\rho < \frac{1}{3}r$, so ist F gleichgradig stetig.

c.) Linearisierbarkeit von $\zeta(\mu)$: Wir schreiben $C_\mu^* = \overline{\{(R_\mu)^n(T_\mu) \mid n \in \mathbb{N}\}}$. Nach der Proposition III.1 ist $\partial G_0 \subset C_0^*$. (In dieser Proposition wurden eigentlich alle kritischen Werte herangezogen; das ist aber nicht nötig, weil der Abstand der Orbits jener kritischen Werte, die im Attraktionsbereich eines attraktiven Zyklus liegen, zu der Julia-Menge und somit zu der Siegel-Scheibe stets größer als Null ist.) Wir schreiben $G_\mu := F(\mu, G_0)$ und zeigen, daß G_μ eine Siegel-Scheibe von R_μ ist.

Nach Konstruktion ist stets der Zweig R_{μ}^{-nm} der Umkehrfunktion von R_{μ}^{nm} , der $\zeta(0)$ fix läßt, auf G_{μ} holomorph und es gilt $R_{\mu}^{-nm}(G_{\mu}) \cap C_{\mu}^* = \emptyset$. C_{μ}^* besitzt mehr als drei Elemente, somit ist die Familie $\{R_{\mu}^{-nm}|G_{\mu}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine normale Familie. Hieraus folgt: $\zeta(\mu)$ ist ein linearisierbarer Fixpunkt der Funktion R_{μ}^m .

Wir zeigen noch, daß G_{μ} die dazugehörige Siegel-Scheibe ist. Dazu benutzen wir die Proposition III.1. Diese besagt, daß die Siegel-Scheibe einer rationalen Funktion R das größte Gebiet ist, auf dem für alle $n \in \mathbb{N}$ der Zweig der Umkehrfunktion von R^{mn} , der das Zentrum ζ der Siegel-Scheibe fix läßt, definiert und holomorph ist. G_0 ist eine Siegel-Scheibe von R_0 , also das größte Gebiet, auf dem für alle $n \in \mathbb{N}$ der Zweig von R_0^{-mn} holomorph ist, für den $R_0^{-mn}(\zeta(0)) = \zeta(0)$ gilt. Diese Eigenschaft überträgt sich via F auf G_{μ} . Also ist G_{μ} das größte Gebiet, auf dem für alle $n \in \mathbb{N}$ der Zweig von R_{μ}^{-mn} holomorph ist, für den $R_{\mu}^{-mn}(\zeta(0)) = \zeta(0)$ gilt. Somit ist G_{μ} eine Siegel-Scheibe von R_{μ} und eine Komponente der Fatou-Menge von R_{μ} .

d.) Reduktion des Problems auf Theorem III.11: Wir befinden uns nun fast in der Situation von Theorem III.10. Pommerenke und Rodin arbeiten mit einer amplen Menge von kritischen Werten, wir dagegen mit einer amplen Menge von freien kritischen Werten. Wie wir aber sehen werden, bleibt die von Pommerenke und Rodin durchgeführte Reduktion des Problems auf Theorem III.11 auch in unserer Situation gültig.

Dazu wählen wir einen erreichbaren Randpunkt ξ_0^* von G_0 . Weil $F(\mu, \cdot)$ ein Homöomorphismus von ∂G_0 auf ∂G_μ ist, folgt: ξ_μ^* ist erreichbarer Randpunkt von G_μ . Wir bezeichnen mit Φ_μ die durch die Normierung $\Phi_\mu(0) = \zeta(\mu)$ und $\lim_{t \nearrow 1} \Phi_\mu(t) = \xi_\mu^*$ eindeutig bestimmte biholomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ auf G_μ . Wir fixieren nun eine Folge $\{\xi_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ in G_0 mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(0) = \xi_0^*$ und setzen $\xi_n(\mu) := F(\mu, \xi_n(0))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mu \in D_\rho(0)$. Aus der Stetigkeit von F folgt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\mu) = \xi_\mu^*$ für alle $\mu \in D_\rho(0)$. Außerdem gilt $\xi_n \in \mathcal{O}(D_\rho(0))$ und $\xi_n(\mu) \in G_\mu$. Die Voraussetzungen von Theorem III.11 sind nun alle erfüllt, und Theorem III.12 ist bewiesen. $\square$

Kapitel IV

Ränder hyperbolischer Komponenten

§1. Ränder hyperbolischer Komponenten

Den a-priori-Aussagen aus §II.4 entnehmen wir, daß positive Resultate über die Stabilität von Julia-Mengen nur dann zu erwarten sind, wenn man die Kontrolle über die Orbits der kritischen Werte behält. Deshalb ist nur der folgende Ansatz erfolgversprechend:

Wir betrachten wie bisher eine analytische Familie $\mathcal{R}: M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ rationaler Funktionen R_λ und fixieren eine hyperbolische Komponente G von M_2 (dabei ist M_2 die Menge aller $\lambda \in M$, für die R_λ hyperbolisch ist - s. §I.3). Falls für ein $\lambda_0 \in \partial G$ bei dem Grenzübergang $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ (mit einer Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G) genauso viele kritische Werte frei werden, wie attraktive Zyklen indifferent, so erwarten wir $\lim_{n \rightarrow \infty} J_{\lambda_n} = J_{\lambda_0}$. Wir werden sehen, daß diese Vermutung richtig ist, wenn die Folgenglieder λ_n sich dem Rand ∂G radial nähern. Wir verfügen aber noch nicht über Aussagen zu der Differenzierbarkeit von ∂G .

Bei dem Studium der Mandelbrot-Familie bemerkte Douady (s. [D1], S.47), daß der Rand jeder beschränkten hyperbolischen Komponente dieser Familie stets Teil einer algebraischen Kurve, also insbesondere eine stückweise analytische Kurve ist. Das Komplement G' der Mandelbrot-Menge ist ebenfalls eine hyperbolische Komponente. Nach [BFH], §4, kann der Rand der Mandelbrot-Menge keine hölderstetige Kurve sein, also insbesondere keine stückweise stetig differenzierbare oder sogar analytische Kurve. Nun erfüllt aber G' für kein $\lambda_0 \in \partial G'$ die im zweiten Absatz aufgestellte Forderung: Für $\lambda \in G'$ besitzt P_λ nur ∞ als attraktiven periodischen Punkt, in dessen Attraktionsbereich der kritische Wert $c = \lambda$ liegt.

Aber auch für $\lambda_0 \in \partial G'$ ist ∞ noch attraktiv; andererseits wird bei dem Grenzübergang $\lambda \rightarrow \lambda_0$ der kritische Wert $c = \lambda$ frei.

In der Tat folgt aus der oben aufgestellten Forderung, daß der Rand "fast überall" eine analytische Kurve ist.

Wir fassen zusammen: Die Forderung aus dem zweiten Absatz ist genau die "richtige" Voraussetzung, um Aussagen über die Differenzierbarkeit des Randes ∂G und über die Stabilität von Julia-Mengen zu erhalten.

Um nun diese Voraussetzung zu formalisieren, fixieren wir eine analytische Familie $\mathcal{R}$ rationaler Funktionen R_λ und eine hyperbolische Komponente G . Besitzt für ein $\lambda_0 \in G$ die Funktion R_{λ_0} einen attraktiven Zyklus $A(\lambda_0)$ der Ordnung n , so existiert nach Theorem I.11 eine Funktion $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}^n(G)$ mit

i.) $A(\lambda_0) = (a_1(\lambda_0), \dots, a_n(\lambda_0))$ und

ii.) Für alle $\lambda \in G$ ist $A(\lambda) = (a_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda))$ ein attraktiver Zyklus der Ordnung n von R_λ .

Mit anderen Worten: Jeder attraktive Zyklus kann auf ganz G holomorph parametrisiert werden. Wir sagen auch: A ist ein (auf G definierter) Attraktor. Um das Hauptergebnis dieses Kapitels formulieren zu können, benötigen wir das Konzept der globalen und lokalen Attraktoren:

Definition IV.1 Ein auf G definierter Attraktor A heißt (bezüglich G) globaler Attraktor von $\mathcal{R}$, falls $A \in \mathcal{O}^n(U \cap M)$ mit einer offenen Umgebung U von $\bar{G}$ und $A(\lambda)$ für jedes $\lambda \in U \cap M$ ein attraktiver Zyklus von R_λ ist. Anderenfalls nennen wir ihn lokal (bezüglich G).

Theorem IV.1 Es sei $\mathcal{R}$ eine analytische Familie rationaler Funktionen und G eine hyperbolische Komponente mit folgender Eigenschaft:

Auf $\overline{G} \cap M$ ist die Anzahl $k(\lambda)$ der kritischen Werte von R_λ , die nicht im Attraktionsbereich eines bezüglich G globalen Attraktors liegen, konstant gleich $k \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}$ besitzt genau k lokale Attraktoren.

Dann existiert eine abzählbare Menge $E \subset \Gamma := M \cap \partial G$ so, daß die Häufungspunkte von E diskret in Γ liegen und $\Gamma \setminus E$ aus (paarweise disjunkten) analytischen Kurvenbögen besteht.

Wir können $k > 0$ annehmen. Anderenfalls liegt für ein beliebiges $\lambda \in \overline{G} \cap M$ jeder kritische Wert von R_λ in dem Attraktionsbereich eines Attraktors. Dann ist R_λ nach [Br], Theorem 6.5, hyperbolisch. G ist eine hyperbolische Komponente, d.h. für kein $\lambda \in \Gamma$ ist R_λ hyperbolisch. Wir erhalten $M = G$ und $\Gamma = \emptyset$. Dieser Fall ist offensichtlich uninteressant.

Bevor wir dieses Theorem beweisen, wollen wir den Rand von G neu charakterisieren. Nach Theorem I.5 liegt im Attraktionsbereich eines attraktiven Zyklus stets ein kritischer Wert. Unter den Voraussetzungen des Theorems enthält der Attraktionsbereich jedes **lokalen** Attraktors stets **genau einen** kritischen Wert. Dieser wird ein freier kritischer Wert, falls sich der lokale Attraktor bei einem Grenzübergang $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in \Gamma$ in einen indifferenten Zyklus verwandelt. Dann ist R_{λ_0} aber nicht mehr hyperbolisch. Wenn aber R_λ für ein $\lambda \in \overline{G}$ mindestens k attraktive Zyklen besitzt, die nicht globale Attraktoren sind, so liegt jeder kritische Wert in dem Attraktionsbereich eines attraktiven Zyklus. Dann ist aber R_λ hyperbolisch. Wir erwarten also das

Lemma V.2 Für ein $\lambda \in M$ gilt $\lambda \in \Gamma$ genau dann, wenn eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G existiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} |m(A(\lambda_n))| = 1$ für (mindestens) einen lokalen Attraktor A .

Beweis des Lemmas: Nach dem oben gesagten ist die Beweisidee klar.

Wir beginnen mit einigen Notationen: Für $x = 1, \dots, k$ bezeichnen wir mit $o(x)$ die Ordnung des lokalen Attraktors $A_x = \{a_{x,1}, \dots, a_{x,o(x)}\}$ und mit m_x seinen Multiplikator. Man beachte, daß stets $a_{x,\omega}, m_x \in \mathcal{O}(G)$ und $o(x)$ konstant auf G ist. Wir betrachten eine Cauchyfolge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda \in \bar{G} \cap M$. Es existiert eine Teilfolge $(\lambda_{n_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ derart, daß die Grenzwerte $a_{x,\omega}(\lambda) := \lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{x,\omega}(\lambda_{n_\nu})$ und $m_x(\lambda) := \lim_{\nu \rightarrow \infty} m_x(\lambda_{n_\nu})$ existieren. Es gilt $|m_x(\lambda)| \leq 1$.

Im Fall $m_x(\lambda) = 1$ ist $a_{x,\omega}(\lambda)$ ein rational indifferent periodischer Punkt von R_λ . Also ist R_λ nicht hyperbolisch und wir erhalten $\lambda \in \Gamma$.

Im Fall $m_x(\lambda) \neq 1$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen $a_{x,\omega}(\lambda) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} a_{x,\omega}(\mu)$, $m_x(\lambda) = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} m_x(\mu)$ sowie daß für eine kleine Umgebung U von λ und festes $\mu \in U$ die Punkte $a_{x,\omega}(\mu)$ paarweise verschieden sind. Im Fall $|m_x(\lambda)| = 1$ ist R_λ nicht mehr hyperbolisch und wir erhalten $\lambda \in \Gamma$.

Falls $|m_x(\lambda)| < 1$ für alle x ist, so besitzt R_λ k attraktive Zyklen, die keine globalen Attraktoren sind. In diesem Fall liegen alle kritischen Werte in den Attraktionsbereichen attraktiver periodischer Punkte. Nach [Br], Theorem 6.5, ist R_λ hyperbolisch: $\lambda \in G$. $\square$

Jetzt wird auch deutlich, weshalb der Rand einer beschränkten hyperbolischen Komponente der Mandelbrot-Menge stets Teil einer algebraischen Kurve ist. Mit dem Lemma erhalten wir nämlich das

Korollar IV.3 *Es sei $G \subset \subset M$ eine hyperbolische Komponente von M_2 , die der Voraussetzung des Theorems IV.1 genügt. Sind die Koeffizienten von R_λ rationale Funktionen in λ , die in einer offenen Umgebung von Γ keine Pole besitzen, so ist Γ Teil einer algebraischen Kurve.*

Beweis des Korollars: Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{B} := \{ (\lambda, z) \in M \times \mathbb{P}_1 : R_{\lambda}^{\circ(\kappa)}(z) - z = 0 = (R_{\lambda}^{\circ(\kappa)})'(z) - 1; \kappa = 1, \dots, k \},$$

dabei bezeichne $\circ(\kappa)$ die Ordnung des lokalen Attraktors A_{κ} . $\mathcal{B}$ ist durch algebraische Gleichungen gegeben und Γ ist in der Projektion von $\mathcal{B}$ auf die erste Variable enthalten, also Teil einer algebraischen Kurve.

□

§2. Beweis von Theorem IV.1

a.) Vorbereitungen: Wir verwenden die Notationen aus dem Beweis von Lemma IV.2. Die stetige Fortsetzung von m_{κ} auf $G \cup \Gamma$ bezeichnen wir wieder mit m_{κ} . Gilt $m_{\kappa}(\lambda) \neq 1$ für ein $\lambda \in \Gamma$, so ist $a_{\kappa, \omega}, m_{\kappa} \in \mathcal{O}(G \cup U)$ mit einer kleinen Umgebung U von λ . Allerdings können auch für ein $\lambda \in \Gamma$ mit $m_{\kappa}(\lambda) = 1$ solche holomorphe Fortsetzungen von $a_{\kappa, \omega}$ und m_{κ} existieren. Dieses ist z.B. dann der Fall, wenn λ ein sogenannter Bifurkationspunkt ist. Hierauf werden wir am Ende des Kapitels zurückkommen. Wir setzen

$$E_1 := \{ \lambda \in \Gamma : a_{\kappa, \omega} \notin \mathcal{O}(G \cup U) \text{ für jede Umgebung } U \text{ von } \lambda \text{ für ein Paar } (\kappa, \omega) \}.$$

Diese Menge ist eine diskrete Teilmenge von Γ , dieses werden wir im letzten Beweisschritt zeigen.

b.) Wir nehmen $\lambda \in \Gamma \setminus E_1$ an und beweisen die

Hilfsaussage 1: Die Mengen $A_{\kappa}(\lambda)$ sind paarweise disjunkt.

Beweis der Hilfsaussage: Falls $A_{\kappa}(\lambda)$ und $A_{\eta}(\lambda)$ für Zahlen $\kappa \neq \eta$ nicht disjunkt sind, so sind sie nach Konstruktion identisch. Mit dem Satz über implizite Funktionen (bzw. im Fall $m_{\kappa}(\lambda) = 1$ mit dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz, [Ra], Theorem I.3.10) und dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt, daß sie für alle $\mu \in G \cup U$ übereinstimmen, also $\kappa = \eta$ ist. Widerspruch. □

c.) Wir nehmen wieder $\lambda \in \Gamma \setminus E_1$ an und zusätzlich, daß $m_\kappa(\lambda) = 1$ für genau ein $\kappa \in \{1, \dots, k\}$ gilt. Dann folgt die

Hilfsaussage 2: Γ ist auf einer Umgebung von λ eine stückweise analytische Kurve.

Beweis der Hilfsaussage: Wir nehmen o. B. d. A. $\kappa = 1$ an. Auf einer offenen zusammenhängenden Umgebung U von λ existiert eine holomorphe Parametrisierung von $A_1(\lambda)$, die Funktion m_1 ist ebenfalls holomorph auf U . Nach Lemma IV.2 ist $\gamma := \Gamma \cap U$ in $m_1^{-1}(\partial \mathbb{D} \cap m_1(U))$ enthalten, also eine stückweise analytische Kurve. Wählen wir U hinreichend klein, so ist γ genau dann in einem Punkt $\mu_0 \in \Gamma \cap U$ nicht differenzierbar (d. h. γ besitzt in μ_0 eine Ecke), wenn $\mu_0 = \lambda$ und $m'_1(\mu_0) = 0$ ist.

Für $\kappa > 1$ und für U hinreichend klein erhalten wir $|m_\kappa(\mu)| < 1$ auf U .

Die Menge E_2 aller Ecken von Γ , die auf diese Weise entstehen, ist eine in $\Gamma \setminus E_1$ diskrete Menge.

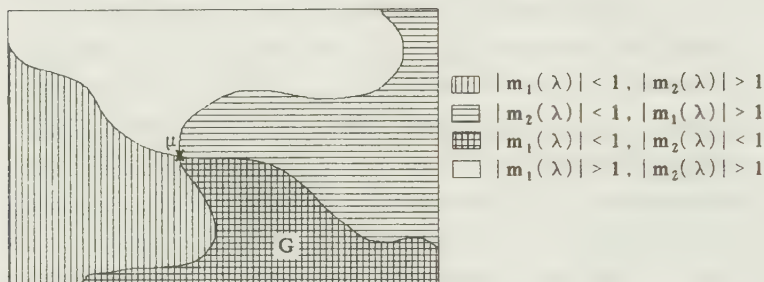
d.) Wir nehmen für $\lambda \in \Gamma \setminus E_1$ an, daß $|m_\kappa(\lambda)| = 1$ für $\kappa \in I \subset \{1, \dots, k\}$ mit $\#I \geq 2$ gilt. Wie in Schritt c.) finden wir zu jedem $\kappa \in I$ eine offene zusammenhängende Umgebung U_κ von λ sowie eine stückweise analytische Kurve γ_κ in U_κ mit folgenden Eigenschaften:

- i.) $\mu \in \gamma_\kappa \Leftrightarrow \mu \in U_\kappa$ und $|m_\kappa(\mu)| = 1$.
- ii.) γ_κ ist in μ_0 genau dann nicht differenzierbar, wenn $\mu_0 = \lambda$ und $m'_\kappa(\mu_0) = 0$ ist.

Wir wählen nun eine Umgebung $U \subset \bigcup_{\kappa \in I} U_\kappa$ so, daß $|m_\eta(\mu)| < 1$ auf U für $\eta \notin I$ gilt, und erhalten $(\Gamma \cap U) \subset (U \cap \bigcup_{\kappa \in I} \gamma_\kappa)$. Weil γ_κ für jedes $\kappa \in I$ eine stückweise analytische Kurve ist, ist auch $\Gamma \cap U$ eine stückweise analytische Kurve.

Die Ecken von Γ können auf zweifache Weise entstehen. Eine Ecke λ von $\Gamma \cap U$ kann eine Ecke (von mindestens) einer Kurve γ_λ sein; diese Ecken nehmen wir zu der Menge E_2 hinzu. Eine Ecke λ von $\Gamma \cap U$ kann auch dadurch entstehen, daß sich in dem Punkt λ mehrere der Kurven γ_λ schneiden; diese Ecken fassen wir in der Menge E_3 zusammen.

Beispiel: $I = \{1, 2\}$



e.) Wir schreiben $E := E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Dann setzt sich $\Gamma \setminus E$ aus analytischen Kurvenbögen zusammen. Nach Konstruktion ist $E_2 \cup E_3$ in $\Gamma \setminus E_1$ diskret, also folgt das Theorem aus der

Hilfssatz 3: E_1 ist eine in Γ diskrete Menge.

Wir fixieren ein $\lambda_0 \in E_1$. Dann existiert ein κ mit $m_\kappa(\lambda_0) = 1$. Wir nehmen o.B.d.A. $\kappa = 1$ an, schreiben $z_0 := a_{1,1}(\lambda_0)$ und ersetzen R_λ durch $R_\lambda^{o(1)}$. Dann ist z_0 eine doppelte Nullstelle der Funktion $z \mapsto R(\lambda_0, z) - z$. Es gilt aber auch die Umkehrung: Ist für ein $\lambda_1 \in M$ ein Punkt z_1 eine mehrfache Nullstelle von $z \mapsto R(\lambda_1, z) - z$, so ist z_1 ein indifferenter Fixpunkt von R_{λ_1} , dessen Multiplikator gleich eins ist. Wir zeigen, daß (λ_0, z_0) kein Häufungspunkt solcher Paare (λ_1, z_1) ist.

Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz existiert eine Umgebung $U \times V$ von (λ_0, z_0) sowie ein Polynom $P(\lambda, z) = z^n + b_{n-1}(\lambda)z^{n-1} + \dots + b_0(\lambda)$ mit: Für $(\lambda_1, z_1) \in U \times V$ gilt: z_1 ist eine Nullstelle von $P(\lambda_1, \cdot)$ der Ordnung m genau dann, wenn z_1 eine Nullstelle der Funktion $z \mapsto R(\lambda_1, z) - z$ der Ordnung m ist. P ist ein sogenanntes Weierstraß-Polynom, also haben wir u. a. $b_v \in \mathcal{O}(U)$ für $v = 0, \dots, n-1$. Wir suchen die $\lambda_1 \in U$, für die $P(\lambda_1, \cdot)$ eine mehrfache Nullstelle besitzt. Nach [vdW], §§ 33 bis 35, ist dieses genau dann der Fall, wenn die Diskriminante Δ des Polynoms verschwindet.

Die Diskriminante ist ein Polynom in den Koeffizienten von P ; in unserer Situation hängen diese holomorph von λ ab und wir erhalten $\Delta \in \mathcal{O}(U)$.

Δ ist eine holomorphe Funktion einer komplexen Variablen; nach dem Identitätssatz bilden die Nullstellen von Δ entweder eine in U diskrete Menge oder Δ verschwindet identisch auf U . Falls die Nullstellen von Δ diskret in U liegen, so ist die Hilfsaussage bewiesen. Wir untersuchen noch den Fall, daß Δ identisch verschwindet. Zu jedem $\lambda_1 \in U$ existiert eine Nullstelle z_1 von Δ ; z_1 ist also mehrfache Nullstelle von $P(\lambda_1, \cdot)$ und ein rational indifferenter Fixpunkt von R_{λ_1} . λ_0 ist ein Randpunkt aus G , also existiert ein $(\lambda_1, z_1) \in (U \cap G) \times V$ so, daß z_1 eine mehrfache Nullstelle von $P(\lambda_1, \cdot)$, mithin ein rational indifferenter Fixpunkt von R_{λ_1} ist. Dann kann aber R_{λ_1} nicht hyperbolisch und λ_1 kein Element einer hyperbolischen Komponente sein. Insbesondere erhalten wir $\lambda_1 \notin G$: Widerspruch. $\square$

Wir fassen zusammen:

E_1 ist die Menge der Parameter $\lambda \in \Gamma$, für die R_λ einen rational indifferenten periodischen Punkt besitzt, der nicht holomorph parametrisiert werden kann; aus diesem Grund betrachten wir sie nicht.

Die Menge der Parameter $\lambda \in \Gamma$, für die die Funktion $\mu \mapsto (R_\mu^n)'(\varphi(\mu))$ nicht injektiv ist (dabei ist φ die Parametrisierung eines indifferenten Zyklus von R_λ), bezeichnen wir mit E_2 . Auch diese Parameterwerte werden wir nicht betrachten; wir schreiben $E' := E_1 \cup E_2$.

E_3 enthält nur Parameterwerte $\lambda \in \Gamma \setminus E'$, für die R_λ mehrere indifferente Zyklen besitzt. Diese Parameterwerte schließen wir in den folgenden Kapiteln **nicht** aus.

Nach der Hilfsaussage 1 besitzt R_λ für $\lambda \in \Gamma$ stets genauso viele indifferente Zyklen wie freie kritische Werte. Mit Theorem III.2' bzw. Korollar III.9 folgt die

Proposition IV.4 Für $\lambda \in \Gamma$ bilden die freien kritischen Werte von R_λ eine ample Menge und R_λ besitzt keinen Herman-Ring.

Abschließend wollen wir noch auf den Begriff "Bifurkationspunkt" eingehen, eine ausführliche Darstellung findet der Leser in der Arbeit [GMG] von J. Guckenheimer und R. McGehee.

Wir betrachten ein $\lambda \in M$, zu dem zwei disjunkte Gebiete G_1 und G_2 in M mit $\lambda \in \partial G_1 \cap \partial G_2$ sowie Attraktoren $a_t \in \mathcal{O}(G_t) \cap \mathcal{E}(\overline{G_t})$ der Periode o_t existieren. Dann sind die Ordnungen der Attraktoren a_t verschieden (s. [GMG]), wir können o.B.d.A. $o_1 < o_2$ und $|a_t(\mu)| = 1$ auf ∂G_t annehmen. Wie gewohnt bezeichnen wir mit m_t die Multiplikatoren von a_t , es gilt $m_t \in \mathcal{E}(\overline{G_t})$. Ist $m_1(\lambda)$ eine n -te Einheitswurzel, aber $m_1(\lambda) \neq 1$, so sind $a_1(\lambda)$ und $a_2(\lambda)$ rational indifferente periodische Punkte mit $o_2 = n \cdot o_1$ und $m_2 = 1$. Weiterhin sind die Ränder ∂G_t nahe λ differenzierbar und ihre Tangenten stimmen in dem Punkt λ überein. λ heißt dann *Bifurkationspunkt der Ordnung n* .

§3. Der Stetigkeitssatz

Wir können nun das Hauptergebnis dieser Arbeit formulieren:

Theorem IV.5 (Der Stetigkeitssatz) *Es sei $\mathcal{R} : M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; (\lambda, z) \mapsto R_\lambda(z)$ eine analytische Familie rationaler Funktionen und G eine hyperbolische Komponente mit folgender Eigenschaft:*

Auf $\bar{G} \cap M$ ist die Anzahl $k(\lambda)$ der kritischen Werte von R_λ , die nicht im Attraktionsbereich eines bezüglich G globalen Attraktors liegen, konstant gleich $k \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}$ besitzt genau k lokale Attraktoren.

Besitzt für ein $\lambda_0 \in \Gamma \setminus E'$ die Funktion R_{λ_0} mindestens einen attraktiven Zyklus, so existiert zu jedem offenen Dreieck $\Delta \subset G$ mit $\bar{\Delta} \cap \partial G = \{\lambda_0\}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit: $\lambda \in \Delta, |\lambda - \lambda_0| < \delta \Rightarrow d(J_\lambda, J_{\lambda_0}) < \varepsilon$.

Es sollen im folgenden alle Dreiecke offen sein. Wir leiten zunächst mit Hilfe der bereits bewiesenen Resultate das Theorem aus den folgenden zwei Propositionen ab, die wir in den letzten zwei Kapiteln dieser Arbeit beweisen werden.

Proposition IV.6 R_{λ_0} besitze eine Siegel-Scheibe S . Zu jedem zusammenhängenden Kompaktum $K \subset S$ existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \lambda \in \Delta \Rightarrow K \subset F_\lambda.$$

Proposition IV.7 Es sei A^* der sofortige Attraktionsbereich eines rational indifferenten Zykels von R_{λ_0} . Zu jedem zusammenhängenden Kompaktum $K \subset A^*$ existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \lambda \in \Delta \Rightarrow K \subset F_\lambda.$$

Nach Lemma II.4 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_1 > 0$ mit:

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta_1 \Rightarrow J_{\lambda_0} \subset U_\varepsilon(J_\lambda).$$

Also reicht es zu zeigen, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in]0, \delta_1[$ existiert mit $J_\lambda \subset U_\varepsilon(J_{\lambda_0})$ für $\lambda \in \Delta$ und $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Dieses ist aber äquivalent dazu, daß zu jedem Kompaktum $K' \subset F_{\lambda_0}$ ein $\delta \in]0, \delta_1[$ existiert mit $K' \subset F_\lambda$ für $\lambda \in \Delta$ und $|\lambda - \lambda_0| < \delta$.

Weil K' eine kompakte Teilmenge der offenen Fatou-Menge F_{λ_0} ist, gibt es höchstens endlich viele Komponenten von F_{λ_0} , die mit K' einen nicht-leeren Durchschnitt besitzen. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß K' in höchstens endlich viele Zusammenhangskomponenten zerfällt. Es sei K eine solche Komponente. Nach dem Klassifikationstheorem (Theorem I.4) gibt es für die Komponente von F_λ , die K enthält, vier Möglichkeiten.

Nach Proposition IV.4 kann R_{λ_0} keinen Herman-Ring besitzen. Es verbleiben noch drei Möglichkeiten: Entweder gilt $K \subset S' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_{\lambda_0}^{-n}(S)$ mit einer Siegel-Scheibe S von R_{λ_0} (d.h. K ist Teilmenge des Rückwärts-orbits einer Siegel-Scheibe von R_{λ_0}) oder K ist Teilmenge des Attraktionsbereiches eines attraktiven Zyklus von R_{λ_0} oder K ist Teilmenge des Attraktionsbereiches $A := A_{\lambda_0}(Z_{\lambda_0})$ eines rational indifferenten Zyklus Z_{λ_0} von R_{λ_0} .

Ist K eine Teilmenge des Attraktionsbereiches eines attraktiven Zyklus von R_{λ_0} , so können wir das Hauptlemma (Lemma II.3) anwenden.

Wir untersuchen nun den Fall, daß R_{λ_0} eine Siegel-Scheibe S mit $K \subset S' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_{\lambda_0}^{-n}(S)$ besitzt, und zeigen, daß wir uns sogar auf den Fall $K \subset S$ beschränken können.

Zu jedem Punkt $z \in S'$ existiert eine Umgebung $U \subset S'$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_{\lambda_0}^{-n}(U) \subset \subset S$. Deshalb finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $V \subset \subset S$ mit $R_{\lambda_0}^{-n}(K) \subset V$. Aus der Stetigkeit von R folgt die Existenz eines $\delta_2 \in]0, \delta_1[$

mit: $|\lambda - \lambda_0| < \delta_2 \Rightarrow R_\lambda^n(K) \subset V$. $\bar{V}$ ist ein Kompaktum in S ; die Proposition IV.6 liefert die Existenz einer Zahl $\delta \in]0, \delta_2[$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \lambda \in \Delta \Rightarrow \bar{V} \subset F_\lambda.$$

Nun ist die Fatou-Menge F_λ rückwärtsinvariant unter R_λ , somit ergibt sich $K \subset F_\lambda$ aus $\bar{V} \subset F_\lambda$.

Wir müssen noch den Fall untersuchen, daß R_{λ_0} einen rational indifferenten Zyklus Z_{λ_0} mit $K \subset A$ besitzt. Wir zeigen, daß wir uns sogar auf den Fall $K \subset A^* := A_{\lambda_0}^*(Z_{\lambda_0})$ beschränken können: Zu jedem Punkt $z \in A$ existiert eine Umgebung $U \subset \subset A$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_{\lambda_0}^n(U) \subset \subset A^*$. Deshalb finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $V \subset \subset A^*$ mit $R_{\lambda_0}^n(K) \subset V$. Aus der Stetigkeit von R folgt die Existenz einer Zahl $\delta_2 \in]0, \delta_1[$ mit: $|\lambda - \lambda_0| < \delta_2 \Rightarrow R_\lambda^n(K) \subset V$. $\bar{V}$ ist ein Kompaktum in A^* ; die Proposition IV.7 liefert die Existenz einer Zahl $\delta \in]0, \delta_2[$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \lambda \in \Delta \Rightarrow \bar{V} \subset F_\lambda.$$

Nun ist die Fatou-Menge F_λ rückwärtsinvariant unter R_λ , somit ergibt sich $K \subset F_\lambda$ aus $\bar{V} \subset F_\lambda$.

Kapitel V

Approximation von Siegel-Scheiben

§1. Überblick

Wir wollen in diesem Kapitel die Stabilität von Siegel-Scheiben untersuchen. Das Zentrum einer Siegel-Scheibe ist stets ein irrational indifferenter periodischer Punkt. Diesen werden wir durch einen attraktiven periodischen Punkt approximieren. Wir zeigen, daß bei diesem Prozeß unter den Voraussetzungen von Theorem IV.5 die entsprechenden Attraktionsbereiche gegen die Vereinigung der Siegel-Scheibe mit ihren Urbildern konvergieren.

Wir fixieren eine hyperbolische Komponente G in dem Parameterraum M einer holomorphen Familie $\mathcal{R}$ rationaler Funktionen, für $\lambda \in \bar{G} \cap M$ sei die Anzahl der freien kritischen Punkte von R_λ gleich der Zahl der bezüglich G lokalen Attraktoren von $\mathcal{R}$ (d.h. die Voraussetzungen von Theorem IV.5 sind erfüllt). Wir beweisen in diesem Kapitel die

Proposition IV.6: Es sei $\lambda_0 \in \partial G \setminus E'$ und Δ ein offenes Dreieck in G mit $\bar{\Delta} \cap \partial G = \{\lambda_0\}$. Besitzt R_{λ_0} mindestens einen attraktiven periodischen Punkt, so existiert zu jedem zusammenhängendem Kompaktum K , das in einer Siegel-Scheibe S von R_{λ_0} liegt, ein $\delta > 0$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \lambda \in \Delta \Rightarrow K \subset F_\lambda.$$

Für den Fall, daß die zu approximierende Funktion genau eine Siegel-Scheibe und die holomorphe Familie eine spezielle Form besitzt, ist dieses Problem bereits von J. C. Yoccoz gelöst worden. Wir stellen seine Lösung im zweiten Paragraphen vor.

Im dritten Paragraphen skizzieren wir den Lösungsweg für den Fall, daß genau eine Siegel-Scheibe vorliegt (aber für beliebige holomorphe Familien). Wir müssen dabei zu einem ungewöhnlichen Trick greifen: Wir führen einen **zweiten** Parameter ein. In den letzten zwei Paragraphen verallgemeinern wir diesen Ansatz und beweisen die Proposition IV.6.

§2. Yoccoz' Lösung zur Approximation einer Siegel-Scheibe

Wir beschäftigen uns in diesem Paragraphen mit Yoccoz' Beweis der

Proposition V.1 ([Y2], Théorème II.2.4) *Eine rationale Funktion R besitze eine Siegel-Scheibe S , deren Zentrum sei $z_0 = 0$ und ein Fixpunkt von R . Es sei $\mathcal{R}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; (\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot R(z)$ und $K \subset S$ eine kompakte Menge. Zu jedem Dreieck $\Delta \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $\bar{\Delta} \cap \partial \mathbb{D} = \{1\}$ existiert ein $\delta > 0$ mit:*

$$\lambda \in \Delta, |\lambda - 1| < \delta \Rightarrow K \subset A_{\lambda}^*(0).$$

Anmerkungen: 1.) Offenbar ist z_0 für $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ ein attraktiver Fixpunkt von R_{λ} und der sofortige Attraktionsbereich $A_{\lambda}^*(0)$ wohldefiniert.
2.) Yoccoz betrachtete den Spezialfall $R(z) = az + z^2$. Seine Argumentation ist aber ohne Änderung in der allgemeineren Situation dieser Proposition gültig.

Beweis der Proposition: a.) Vorbereitungen: R besitzt nahe z_0 eine Potenzreihenentwicklung der Form $R(z) = az + a_2 z^2 + \dots$ mit einer Zahl $a = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Die Siegel-Scheibe S ist einfach zusammenhängend, somit existiert eine biholomorphe Funktion Ψ von $D_r(0)$ auf S mit folgenden Eigenschaften:

($\Psi 1$) Ψ ist auf keinem Gebiet $B_{\neq}^{\supset} D_r(0)$ holomorph,

($\Psi 2$) $\Psi(0) = z_0$ und $\Psi'(0) = 1$ sowie

($\Psi 3$) $(R \circ \Psi)(z) = \Psi(az)$ auf $D_r(0)$.

Ψ ist durch die Normierung ($\Psi 2$) eindeutig bestimmt. Wir nehmen noch o.B.d.A. an, daß Δ symmetrisch zur reellen Achse liegt. Θ bezeichne den Winkel zwischen dieser Achse und einem Schenkel von Δ im Punkt $\lambda_0 = 1$. Wir setzen noch $t := 1 - \lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, beide Bezeichnungen werden wir parallel verwenden. Für $\lambda \in \Delta$ gilt $|\arg t| < \Theta$. Wir fixieren ein $\varepsilon \in]0, r[$ und schreiben $r' := (1 - \varepsilon) \cdot r$ sowie $r'' := (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \cdot r$. Die Proposition folgt aus der

Hilfssatz 1: Es existiert ein $t_0 > 0$ mit:

$$\lambda \in \Delta, |\lambda - 1| < t_0 \Rightarrow \Psi(D_{r'}(0)) \subset A_{\lambda}^*(0).$$

b.) Beweis der Hilfsaussage: Aus der Stetigkeit von $\mathcal{R}$ folgt die Existenz einer Zahl $\delta = \delta(n, \varepsilon) > 0$ mit:

$$|1 - \lambda| \leq \delta, |\xi| \leq r'', v \in \{0, \dots, n\} \Rightarrow \mathcal{R}^v(\lambda, \xi) \in S.$$

Wir fixieren ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann sind die Funktionen

$$y_v : D_{\delta(n, \varepsilon)}(0) \times D_{r''}(0) \rightarrow S; (t, \xi) \mapsto \mathcal{R}^v(\lambda, \Psi(\xi))$$

und

$$x_v : D_{\delta(n, \varepsilon)}(0) \times D_{r''}(0) \rightarrow D_r(0); (t, \xi) \mapsto \Psi^{-1}(y_v(t, \xi))$$

für $v = 0, \dots, n$ wohldefiniert und holomorph. Auf $D_{r''}(0)$ ergibt sich aus ($\Psi 3$) die Gleichung $x_v(0, \xi) = a^v \cdot \xi$. Differentiation liefert

$$(2) \quad \frac{\partial x_n}{\partial t}(0, \xi) = \frac{\partial y_n}{\partial t}(0, \xi) \cdot \left[\frac{d\Psi}{dz}(x_n(0, \xi)) \right]^{-1}.$$

Aus $\mathcal{R}(\lambda, \cdot) \equiv (1 - t) \cdot R$ folgt für $v = 1, \dots, n$:

$$(3) \quad \frac{\partial y_n}{\partial t}(0, \xi) = -y_v(0, \xi) + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z}(1, y_{v-1}(0, \xi)) \cdot \frac{\partial y_{v-1}}{\partial t}(0, \xi).$$

Durch Differentiation der Gleichung (Y 3) erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z}(1, y_{v-1}(0, \xi)) &= a \cdot \frac{\frac{d\Psi}{dz}(a \cdot x_{v-1}(0, \xi))}{\frac{d\Psi}{dz}(x_{v-1}(0, \xi))} \\ &= a \cdot \frac{\frac{d\Psi}{dz}(x_v(0, \xi))}{\frac{d\Psi}{dz}(x_{v-1}(0, \xi))}.\end{aligned}$$

Weil $\Psi \in \mathcal{O}(D_r(0))$ injektiv mit $\Psi(0) = 0$ ist, folgt die Holomorphie der Funktion

$$k: D_r(0) \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \frac{\Psi(z)}{z \cdot \frac{d\Psi}{dz}}.$$

Aus der Gleichung (2) erhalten wir mit Hilfe der Rekursionsformel (3), nachdem wir $y_n(0, \xi) = \Psi(x_n(0, \xi))$ und (4) eingesetzt haben:

$$(5) \quad \frac{\partial x_n}{\partial t}(0, \xi) = -\lambda_0^n \cdot \xi \cdot \sum_{v=1}^n k(a^v \cdot \xi).$$

Wegen $a = e^{2\pi i \alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt nach Birkhoffs Ergodizitätstheorem ([Las], Theorem 4.2.4.) für $0 < |\xi| < r'$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n k(a^v \cdot \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(|\xi| \cdot e^{i\tau}) d\tau.$$

Die Mittelwertgleichung für holomorphe Funktionen liefert dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n k(a^v \cdot \xi) = k(0) = 1 \quad \text{gleichmäßig auf } D_{r'}(0).$$

Also existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $N = N(\eta) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit

$$(6) \quad \left| \frac{\partial x_N}{\partial t}(0, \xi) + N \cdot a^N \cdot \xi \right| = \left| \frac{\partial x_N}{\partial t}(0, \xi) + N \cdot x_N(0, \xi) \right| < \frac{N\eta}{2} < N\eta$$

auf $\overline{D_{r'}(0)}$. Wir fixieren N . Dann sind für $v = 0, \dots, N$ die Funktionen x_v holomorph auf $D_{\delta(N, \varepsilon)}(0) \times D_{r''}(0)$. Nun können wir zu jedem $\eta > 0$ ein $t_0 = t_0(N) > 0$ finden mit:

$$(7) \quad |t| \leq t_0, |\xi| \leq r' \Rightarrow \left| x_N(t, \xi) - x_N(0, \xi) - t \cdot \frac{\partial x_N}{\partial t}(0, \xi) \right| \leq |t| \eta.$$

Die Ungleichungen (6) und (7) ergeben zusammen für $|\xi| = r'$:

$$(8) \quad r' \left| \frac{x_N(t, \xi)}{x_N(0, \xi)} - 1 + tN \right| \leq (N+1) \cdot |t| \cdot \eta \leq 2N |t| \eta.$$

Zu jedem $\Theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ existiert ein $\beta = \beta(\Theta) > 0$ und ein $t_1 = t_1(\Theta) > 0$ mit:

$$(9) \quad 0 < |t \cdot N| < t_1, |\arg t| < \Theta \Rightarrow d(\partial D, 1 - t \cdot N) = d(\partial D, \lambda) > |t| \beta N.$$

Vorgegeben war $\Theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Wir wählen zuerst $\beta = \beta(\Theta)$ und $t_1 = t_1(\Theta)$, setzen $\eta = \frac{r' \beta}{2}$, wählen hierzu wie oben ein $N = N(\eta)$ und schließlich noch ein $t_0 = t_0(N) \in]0, t_1[$. Dann folgt aus (8) und (9):

$$0 < |t| < \frac{t_0}{N}, |\arg t| < 0, |\xi| = r' \Rightarrow \frac{x_N(t, \xi)}{x_N(0, \xi)} \in D.$$

Dieses bedeutet, daß $\Psi(D_{r'}(0))$ für $\lambda \in \Delta, |\lambda - 1| < \frac{t_0}{N}$ invariant unter $\mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ ist. Somit gilt für diese λ : $\Psi(D_{r'}(0)) \subset A_\lambda^*(0)$. $\square$

§ 3. Verallgemeinerung - der Trick

Die spezielle Form der Familie $\mathcal{R}$ spielte in Yoccoz' Beweis der Proposition V.1 eine zentrale Rolle. Für beliebige Familien dürfte die Rekursion für $\frac{\partial y_n}{\partial t}$ nicht mehr beherrschbar sein und nicht zu einem expliziten Ausdruck wie Zeile (5) führen. Deshalb müssen wir in der allgemeinen Situation einen anderen Weg einschlagen.

Wir erläutern zunächst für den Fall, daß die rationale Funktion genau einen freien kritischen Punkt und genau eine Siegel-Scheibe besitzt, die Beweisidee und den Trick. In den nächsten zwei Paragraphen werden wir die Proposition IV.6 beweisen und dabei auch die hier ausgelassenen Details ausführlich behandeln.

Wir betrachten eine holomorphe Familie $R: M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; (\lambda, z) \mapsto R(\lambda, z)$ rationaler Funktionen R_λ , die den Voraussetzungen von Theorem IV.5 genügt. Für ein λ_0 besitze R_{λ_0} genau einen freien kritischen Punkt c und eine Siegel-Scheibe S , deren Zentrum z_0 ein Fixpunkt ist. Man kann

o. B. d. A. $z_0 = 0$ setzen. Nach Uparametrisieren und Verkleinern von M können wir noch zusätzlich annehmen:

(A1) $M \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $G := M \cap \mathbb{D}$ ist eine hyperbolische Komponente,

(A2) $\Gamma := M \cap \partial G = \{e^{2\pi i \tau} : \tau_1 < \tau < \tau_2\}$ mit $-\pi < \tau_1 < \tau < \tau_2 < \pi$ und

(A3) für eine Umgebung U von z_0 gilt:

$$\mathcal{R}_\lambda(z) = \lambda \cdot a \cdot z + a_2(\lambda) \cdot z^2 + \dots \text{ auf } M \times U.$$

Wie im ersten Paragraphen ist $a = e^{2\pi i \alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wir skizzieren den Beweis der

Proposition V.2 Es sei $\mathcal{R} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \times M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1 ; (\lambda, \mu, z) \mapsto \frac{\lambda}{\mu} \cdot \mathcal{R}(\mu, z)$ und $K \subset S$ eine kompakte Menge. Zu jedem Dreieck $\Delta \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $\overline{\Delta} \cap \partial \mathbb{D} = \{1\}$ existiert ein $\delta > 0$ mit:

$$\lambda \in \Delta, |\lambda - 1| < \delta \Rightarrow K \subset A_{\lambda}^*(0).$$

Nach (A1) haben wir $M \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, also ist $\mathcal{R}$ wohldefiniert. Aus (A3) folgt, daß wir auf einer Umgebung U von z_0 folgende Potenzreihenentwicklung von $\mathcal{R}$ erhalten:

$$(10) \quad \mathcal{R}(\lambda, \mu, z) = \lambda a z + \frac{\lambda}{\mu} a_2(\mu) z^2 + \dots \text{ auf } \mathbb{C} \setminus \{0\} \times M \times U.$$

Nach Theorem III.12 besitzt für $\mu \in M$ die Funktion $\mathcal{R}(1, \mu, \cdot)$ eine Siegel-Scheibe S_μ mit z_0 als Zentrum und diese Siegel-Scheiben können holomorph parametrisiert werden.

Die Familien $\mathcal{R}_\mu : \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1 ; (\lambda, z) \mapsto \mathcal{R}(\lambda, \mu, z)$ genügen für jedes $\mu \in M$ den Voraussetzungen der Proposition V.1. Die Konvergenz wird gleichmäßig in μ sein, d. h.: Zu jedem Kompaktum $K \subset S$ existieren Zahlen $\delta, \varepsilon > 0$ mit :

$$\text{i.) } |\mu - 1| < \delta \Rightarrow K \subset S_\mu \text{ und}$$

$$\text{ii.) } |\mu - 1| < \varepsilon, |\lambda - 1| < \delta, \lambda \in \Delta \Rightarrow K \subset A_{\lambda, \mu}(z_0).$$

Wählt man $\mu = \lambda$ mit $|\lambda - 1| < \min\{\delta, \varepsilon\}$ und $\lambda \in \Delta$, so folgt wegen $\mathcal{R}(\lambda, \lambda, \cdot) \equiv \mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ die Proposition.

§ 4. Vorbereitung des Beweises

Wir betrachten eine analytische Familie $R: M \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1; (\lambda, z) \mapsto R_\lambda(z)$, fixieren eine hyperbolische Komponente G und $\lambda_0 \in \Gamma \setminus E'$; die Voraussetzungen von Theorem IV.5 seien erfüllt. Dann existiert ein periodischer Punkt z_0 , der Zentrum einer Siegel-Scheibe von $R(\lambda_0, \cdot)$ ist, eine Umgebung U von $G \cup \{\lambda_0\}$ sowie eine Funktion $a_0 \in \mathcal{O}(U)$ mit

i.) $a_0(\lambda) \rightarrow z_0$ für $\lambda \rightarrow \lambda_0, \lambda \in U$, und

ii.) $a_0(\lambda)$ ist für alle $\lambda \in G$ ein attraktiver periodischer Punkt von R_λ .

Die Ordnung von z_0 (und somit auch die von $a_0(\lambda)$) sei m_0 . Wir schreiben $Z_0 := \{R^\mu(\lambda_0, z_0) : \mu = 1, \dots, m_0\}$. Wir haben nicht ausgeschlossen, daß $R(\lambda_0, \cdot)$ einen weiteren indifferenten Zyklus besitzt; zu einem solchen Zyklus $Z_1 := \{R^\mu(\lambda_0, z_1) : \mu = 1, \dots, m_1\}$ finden wir wie oben eine Funktion $a_1 \in \mathcal{O}(U)$ (wobei das obige U eventuell etwas verkleinert werden, aber noch λ_0 enthalten muß). Nach Umparametrisieren erhalten wir für λ nahe λ_0 und z nahe z_0 eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$(11) \quad R^{m_0}(\lambda, z) = \lambda b z + b_2(\lambda) z^2 + \dots \quad \text{mit } b = e^{2\pi i \alpha_0}, \alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Wir haben jetzt offenbar $\lambda_0 = 1$.

Warnung : Für jedes $\lambda \in \mathbb{D} \cap M$ ist z_0 ein attraktiver periodischer Punkt von R_λ . Hieraus folgt aber **nicht**, daß $\mathbb{D} \cap M$ Teilmenge einer hyperbolischen Komponente ist! Denn weitere Zyklen könnten für gewisse $\lambda \in \mathbb{D} \cap M$ indifferent sein.

Wendet man nun das im vorhergehenden Paragraphen beschriebene Verfahren an, so können mehrere Katastrophen eintreten. Um dieses einzusehen, studieren wir die Familie $(\lambda, z) \mapsto \mathcal{R}(\lambda, z) := \frac{1}{\lambda} R^{m_0}(\lambda, z)$.

Erste Katastrophe: Für $\lambda \neq 1$ kann $\mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ **weniger** indifferente Zyklen besitzen als $\mathcal{R}(1, \cdot)$. Z.B. wird in dem Fall $m_0 = m_1$ und $z_1 = \infty$ für $\lambda \in \mathbb{D}$ der Punkt ∞ repulsiv. Dann könnte einer der freien kritischen Werte von $\mathcal{R}(1, \cdot)$ ein präperiodischer kritischer Wert von $\mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ werden. Dann sind die Orbits der freien kritischen Werte von $\mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ nicht mehr homöomorph zu den Orbits der freien kritischen Werte von $\mathcal{R}(1, \cdot)$ und wir können das Theorem III.12 nicht mehr anwenden!

Zweite Katastrophe: Für die holomorphe Parametrisierung der Siegel-Scheiben benötigen wir nicht die präperiodischen kritischen Werte; wir könnten diese streichen. Es könnten aber für verschiedene Parameterwerte verschiedene kritische Werte präperiodisch werden. Dann ist eine holomorphe Parametrisierung der nicht-präperiodischen kritischen Werte nicht mehr möglich. Wir können das Theorem III.12 nicht mehr angewenden und der Beweis bricht zusammen.

Dritte Katastrophe: Wir nehmen $m_0 < m_1$ an. Dann besitzt $\mathcal{R}^{m_0}(1, \cdot)$ mehr freie kritische Werte als indifferente Zyklen. Wir können nicht annehmen, daß die überzähligen präperiodisch sind. Wir können auch nicht annehmen, daß die Kardinalzahl einer amplen Teilmenge der kritischen Werte gleich der Zahl der indifferenten Zyklen ist. Also ist auch in diesem Fall eine Anwendung von Theorem III.12 nicht möglich.

Aus diesen drei Fallstudien ergeben sich für das weitere Vorgehen zwei Forderungen:

- 1.) Die dritte Katastrophe können wir nur dadurch vermeiden, daß wir $\mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ **nicht** durch eine iterierte ersetzen.
- 2.) Wir benötigen eine Familie $\mathcal{R}$, die dieselben indifferenten Zyklen wie $\mathcal{R}(1, \cdot)$ besitzt - so vermeiden wir die ersten zwei Katastrophen.

Nach der zweiten Forderung soll $\mathcal{R}$ so abgeändert werden, daß die indifferenten periodischen Punkte und der Grad der Funktion erhalten bleiben.

Dieses dürfte i. A. nicht mehr explizit möglich sein (es treten ähnliche Probleme auf wie in §III.3 geschildert). Deshalb müssen wir wiederum die quasikonforme Chirurgie anwenden.

Die n -te Iterierte der Funktion $\mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot) = \frac{F(\lambda, z)}{F(\mu, z)} R(\mu, \cdot)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}^n$. Dabei sei F so gewählt, daß $\mathcal{R}(1, \mu, \cdot)$ dieselben indifferenten periodischen Punkte und dieselben freien kritischen Werte besitzt wie $R(1, \cdot)$. Außerdem müssen die Orbits der freien kritischen Werte holomorph in μ parametrisiert werden können, d. h. F darf nur auf gewissen Teilbereichen von $\mathbb{P}_1$ nicht holomorph sein. Wäre auf $\mathbb{P}_1$ $\mathcal{R}^{m_0}(\lambda, \mu, \cdot) \equiv \frac{\lambda}{\mu} R^{m_0}(\mu, z)$, so könnten wir die Argumentation aus dem dritten Paragraphen übernehmen. Dieses dürfte aber i. A. nicht der Fall sein; also ergeben sich Probleme bei der Rekursion für $\frac{\partial y_n}{\partial t}$. Wir können aber F so wählen, daß zu einem vorgegebenen $\sigma > 0$ auf jedem Kompaktum $K \subset S$

$$(\mathcal{R} 0) \quad \left| \frac{\lambda}{\mu} R^{m_0}(\mu, z) - \mathcal{R}^{m_0}(\lambda, \mu, z) \right| < \sigma$$

gilt. Für σ hinreichend klein bleibt die Ungleichung (6) und damit auch die weitere Rechnung gültig. Wir werden diese Forderung an $\mathcal{R}$ im nächsten Paragraphen konkretisieren. Zunächst jedoch wollen wir die weiteren Forderungen an F bzw. $\mathcal{R}$ zusammenstellen. $\mathcal{R}$ soll eine spezielle Bauart besitzen:

$$(\mathcal{R} 1) \quad \mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot) \equiv \frac{F(\mu, z)}{F(\lambda, z)} R(\mu, \cdot) \quad \text{mit} \quad \mathcal{R}(1, 1, \cdot) \equiv R(1, \cdot),$$

$$(\mathcal{R} 2) \quad \deg \mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot) = \deg R(1, \cdot).$$

z_0 soll stets periodischer Punkt sein und sein Multiplikator darf nicht von μ abhängen:

$$(\mathcal{R} 3) \quad \mathcal{R}^{m_0}(1, \mu, z_0) = z_0 \quad \text{und}$$

$$(\mathcal{R} 4) \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{R}^{m_0}(1, \mu, z_0) = \frac{\partial}{\partial z} R^{m_0}(1, z_0).$$

Zu den k freien kritischen Werten von $R(1, \cdot)$ existieren (auf einer kleinen Umgebung der eins) holomorphe Funktionen c_κ so, daß $c_\kappa(\mu)$ kritischer Punkt von $R(\mu, \cdot)$ ist (die Ordnung $n(\kappa)$ ist nach Voraussetzung unabhängig von μ). $c_\kappa(\mu)$ soll auch kritischer Punkt der Ordnung $n(\kappa)$ von $\mathcal{R}(1, \mu, \cdot)$ sein:

$$(\mathcal{R} 5) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{R}(1, \mu, c_\kappa(\mu)) \quad \text{für } v=0, \dots, n(\kappa).$$

Nach Voraussetzung ist $\lambda_0 \in \Gamma \setminus E'$, also können insbesondere alle indifferenten periodischen Punkte durch holomorphe Funktionen parametrisiert werden. Zu jedem indifferenten Punkt $\zeta_0 \in \{z_0, \dots, R^{m_0}(1, z_0)\}$ der Ordnung m von $R(1, \cdot)$ existiert eine (auf einer kleinen Umgebung der eins) holomorphe Funktion ζ mit $\zeta(1) = \zeta_0$ und $\zeta(\mu)$ ist indifferent periodischer Punkt von $R(\mu, \cdot)$. $\zeta(\mu)$ soll auch indifferent periodischer Punkt der Ordnung m von $\mathcal{R}(1, \mu, \cdot)$ sein:

$$(\mathcal{R} 6) \quad \mathcal{R}^v(1, \mu, \zeta(\mu)) = R^v(\mu, \zeta(\mu)) \quad \text{für alle } v=0, \dots, m-1 \quad \text{und}$$

$$(\mathcal{R} 7) \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{R}^m(1, \mu, \zeta(\mu)) = \frac{\partial}{\partial z} R^m(\mu, \zeta(\mu)).$$

Es soll stets $\deg \mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot) = \deg R(1, \cdot)$ gelten. Dieses werden wir mit Hilfe der quasikonformen Chirurgie gewährleisten. Dazu benötigen wir ein festes, nicht-periodisches Gebiet, das die Punkte enthält, in denen $\mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot)$ nicht holomorph ist. Die zweite Voraussetzung von Theorem IV.5 besagte, daß $R(1, \cdot)$ mindestens einen attraktiven Zyklus besitzt, wir können o.B.d.A. annehmen, daß ∞ für alle $\mu \in M$ ein attraktiver periodischer Punkt ist. Dann existieren (von μ unabhängige) Umgebungen W' und W'' von ∞ , die stets in dem Attraktionsbereich von ∞ enthalten sind und für die $R(\mu, W'') \subset \subset W' \subset \subset W''$ gilt. Wir schreiben $W := W'' \setminus W'$ und $d_0 := d(\partial W', \partial R(\mu, W''))$; nach Konstruktion ist $d_0 > 0$. Wir fordern:

$$(\mathcal{R} 8) \quad \infty \text{ ist attraktiver periodischer Punkt von } \mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot) \text{ und es gilt stets } \mathcal{R}(1, \mu, W'') \subset W'.$$

Dadurch garantieren wir, daß W stets im Attraktionsbereich von ∞ (bezüglich der Funktion $\mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot)$) liegt. Wir fordern

$$(\mathcal{R} 9) \quad \mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot) \in \mathcal{O}(\mathbb{P}_1 \setminus W).$$

Dann können wir das qc-Lemma anwenden und zeigen, daß $\mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot)$ zu einer rationalen Funktion konjugiert ist.

§ 5. Ende des Beweises - Konstruktion von $\mathcal{R}$

Die Konstruktion von $\mathcal{R}$ erfolgt in mehreren Schritten.

a.) Wir beginnen mit dem Ansatz $F(\mu, \cdot) = f(\mu, \cdot) \cdot (1 - \mu) + 1$. Dann ist $(\mathcal{R} 1)$ automatisch erfüllt. Wir konstruieren nun ein Polynom $f(\mu, \cdot)$ so, daß die Forderungen $(\mathcal{R} 3)$ bis $(\mathcal{R} 7)$ erfüllt sind. Für $(\mathcal{R} 3)$ benötigen wir:

$$(f 1) \quad f(\mu, \mathcal{R}^v(\mu, z_0)) = 0 \quad \text{für } v = 0, \dots, m_0 - 2.$$

Denn für $v = 0, \dots, m_0 - 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{v+1}(1, \mu, z_0) &= \mathcal{R}(1, \mu, \mathcal{R}^v(1, \mu, z_0)) \\ &= (f(\mu, \mathcal{R}^v(1, \mu, z_0)) \cdot (1 - \mu) + 1) \cdot \mathcal{R}(\mu, \mathcal{R}^v(1, \mu, z_0)) \\ &= \mathcal{R}(\mu, \mathcal{R}^v(1, \mu, z_0)) \end{aligned}$$

und Induktion über v liefert $(\mathcal{R} 3)$ für $v = 0, \dots, m_0 - 2$.

Für $v = m_0$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{m_0}(1, \mu, z_0) &= \mathcal{R}(1, \mu, \mathcal{R}^{m_0-1}(1, \mu, z_0)) \\ &= (f(\mu, \mathcal{R}^{m_0-1}(1, \mu, z_0)) \cdot (1 - \mu) + 1) \cdot \mathcal{R}(\mu, \mathcal{R}^{m_0-1}(1, \mu, z_0)) \\ &= (f(\mu, \mathcal{R}^{m_0-1}(1, \mu, z_0)) \cdot (1 - \mu) + 1) \cdot 0 = 0 = z_0. \end{aligned}$$

Um (R 4) zu erhalten, setzen wir

$$(f2) \quad f(\mu, R^{m_0-1}(\mu, z_0)) = \frac{1}{\mu} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\mu, R^v(\mu, z_0)) = 0 \quad \text{für } v = 0, \dots, m_0 - 2.$$

Mit (f1) und (f2) ergibt sich für $v = 0, \dots, m_0 - 2$:

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{\partial}{\partial z} R(1, \mu, R^v(1, \mu, z_0)) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} f(\mu, R^v(1, \mu, z_0)) \cdot (1 - \mu) \cdot R(\mu, R^v(1, \mu, z_0)) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} R(\mu, R^v(1, \mu, z_0)) \cdot f(\mu, R^v(1, \mu, z_0)) \cdot (1 - \mu) + 1 \\ &= \frac{\partial}{\partial z} R(\mu, R^v(1, \mu, z_0)) \end{aligned}$$

sowie

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial z} R(1, \mu, R^v(1, \mu, z_0)) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} R(\mu, R^v(\mu, z_0)).$$

Die Gleichungen (11) bis (13) liefern dann

$$\frac{\partial}{\partial z} R^{m_0}(1, \mu, z_0) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} R^{m_0}(\mu, z_0) = \frac{\partial}{\partial z} R^{m_0}(1, z_0)$$

und (R 4) ist ebenfalls erfüllt.

Die Gültigkeit von (R 5) folgt offenbar aus:

$$(f5) \quad \text{Jeder freie kritische Punkt } c(\mu) \text{ von } R(\mu, \cdot) \text{ der Ordnung } n(c) \\ \text{ist eine Nullstelle von } f(\mu, \cdot) \text{ der Ordnung } n(c)+1.$$

Man beachte, daß c eine holomorphe Funktion in μ ist! (R 6) erhalten wir aus:

$$(f4) \quad \text{Jeder indifferente periodische Punkt } \zeta_0(\mu) \notin \{z_0, \dots, R^{m_0}(\mu, z_0)\} \\ \text{von } R(\mu, \cdot) \text{ ist einfache Nullstelle von } f(\mu, \cdot).$$

Dabei ist ζ_0 eine holomorphe Funktion in μ . Wir müssen noch dafür sorgen, daß der periodische Punkt $\zeta_0(\mu)$ indifferent wird. Dazu fixieren wir einen solchen Punkt $\zeta_0(\mu)$; seine Ordnung sei n . Wir setzen für $v = 0, \dots, n-1$: $h(\mu) = \frac{\partial}{\partial z} R(1, R^v(1, \zeta_0(\mu))) - \frac{\partial}{\partial z} R(\mu, R^v(\mu, \zeta_0(\mu)))$.

Mit einer elementaren Rechnung folgt (R 7) aus

$$(f5) \quad \frac{\partial}{\partial z} f(\mu, R^\vee(\mu, \zeta_0(\mu))) = \frac{h(\mu)}{(1-\mu) \cdot R(\mu, R^\vee(\mu, \zeta_0(\mu)))}$$

Man beachte, daß h an der Stelle $\mu=1$ eine Nullstelle besitzt, also ist die rechte Seite wohldefiniert und holomorph in μ . Für kleine μ ist $\zeta_0(\mu)$ kein kritischer periodischer Punkt von $R(\mu, \cdot)$ (dann wäre $\zeta_0(\mu)$ nämlich ein superattraktiver periodischer Punkt), also sind (f3) und (f4) miteinander verträglich. Ähnliche Überlegung ergeben, daß die Bedingungen (f1) bis (f5) sich nicht widersprechen. Also existiert für ein kleines $\delta > 0$ eine holomorphe Familie $f: D_\delta(0) \times P_1 \rightarrow P_1$ von Polynomen $f(\mu, \cdot)$ so, daß die Bedingungen (f1) bis (f5) und somit auch (R 3) bis (R 7) erfüllt sind.

b.) Wir fixieren ein Kompaktum $K \subset S$ und suchen eine Funktion g so, daß mit $F(\mu, \cdot) = g(\mu, z) \cdot f(\mu, \cdot) \cdot (\mu-1) + 1$ auch die Forderung (R 0) erfüllt ist. Wir wählen den Ansatz $g = 1 + g_1 + g_2$ mit $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(D_\delta(0) \times \mathbb{C})$. Außerdem soll $g_1(\mu, \cdot)$ in jedem periodischen Punkt $\zeta_0(\mu)$ von $R(\mu, \cdot)$ eine doppelte Nullstelle und in jedem kritischen Punkt c der Ordnung m von $R(\mu, \cdot)$ eine Nullstelle der Ordnung $m+1$ besitzen. Dadurch werden die in a.) festgelegten Nullstellen von $F(\mu, \cdot)$ und die Funktionswerte von $F(\mu, \cdot)$ bzw. $\frac{\partial}{\partial z} F(\mu, \cdot)$ nicht verändert, also sind weiterhin (R 3) bis (R 7) erfüllt.

Wir müssen noch g_2 ermitteln. Für $v = 0, \dots, m_0$ sind die Mengen $R^\vee(\mu, K)$ paarweise disjunkt. Wir können K als offen und einfach zusammenhängend annehmen. $R(1, \cdot)$ bildet stets $R^\vee(1, K)$ biholomorph auf $R^{\vee+1}(1, K)$ ab, also ist $K^* := K \cup \dots \cup R^{m_0-1}(1, K)$ als Vereinigung paarweise disjunkter, einfach zusammenhängender offener Mengen polynomkonvex. Damit ist auch $D_\delta(1) \times K^*$ polynomkonvex. Zu jedem $\sigma' > 0$ existiert nach dem Oka-Weil-Theorem ([Ra], Theorem VI.1.6) ein Polynom $g_3 \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$ mit $|F(\mu, \cdot) - 1| < \sigma'$ auf $D_\delta(0) \times (K \cup \dots \cup R^{m-2})$ und $|F(\mu, \cdot) - \frac{1}{\mu}| < \sigma'$ auf $D_\delta(1) \times R^{m_0-1}(1, K)$. Wählt man σ' hinreichend klein, so erhält man für ein vorgegebenes $\sigma > 0$ die

Hilfssatz: Zu jedem Kompaktum $K \subset S$ und jedem $\sigma > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sowie eine Funktion $\mathcal{R}$ mit den Eigenschaften (R1) und (R3) bis (R9) sowie

$$|\mathcal{R}^{m_0}(1, \mu, \cdot) - \frac{1}{\mu} R^{m_0}(1, \cdot)| < \sigma \text{ auf } \overline{D_\delta(1)} \times R^{m_0}(1, K).$$

Damit ist auch die Forderung (R0) erfüllt.

c.) Weil die Funktionen $F(\mu, \cdot)$ Polynome sind, gilt (R2) nicht mehr. Wir wählen eine Abschneidefunktion $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{P}_1)$ mit $a \equiv 1$ auf $\mathbb{P}_1 \setminus W''$, $a \equiv 0$ auf W' und $0 < a(z) < 1$ auf W . Wir setzen

$$(11) \quad F(\mu, \cdot) = a(z) \cdot g(\mu, \cdot) \cdot f(\mu, \cdot) \cdot (\mu - 1) + 1.$$

Dann sind für μ hinreichend nahe die Bedingungen (R0) bis (R9) erfüllt. Wir schreiben $E = W' \cup \dots \cup R^{N-1}(1, W')$, N sei die Ordnung des attraktiven periodischen Punktes ∞ (bezüglich $R(1, \cdot)$). Nach Konstruktion ist $R(1, E) \subset E$. Für $\mu \rightarrow 1$ erhalten wir $\mathcal{R}(1, \mu, z) \rightarrow R(1, z)$ gleichmäßig auf $\mathbb{P}_1$. Deshalb gilt für δ hinreichend klein und $\mu \in D_\delta(1)$ stets $\mathcal{R}(1, \mu, E) \subset E$. Außerdem folgt aus $R^N(1, W) \subset E$ für hinreichend kleines δ : $\mu \in D_\delta(1) \Rightarrow \mathcal{R}^N(1, \mu, W) \subset E$. Wir können nun (mit $\Phi \equiv \text{id}$) das qc-Lemma anwenden. Jede Funktion $\mathcal{R}(1, \mu, z)$ ist danach zu einer rationalen Funktion $\mathcal{R}^*(1, \mu, z)$ konjugiert. Wir bestimmen deren indifferenten periodischen Punkte und kritischen Werte.

Nach Voraussetzung besitzt $R(1, \cdot)$ genauso viele freie kritische Werte wie indifferente Zyklen. Nach Konstruktion besitzt $\mathcal{R}(1, \mu, z)$ mindestens ebenso viele indifferente Zyklen wie $R(1, \cdot)$, mit dem Hauptlemma folgt aber, daß $\mathcal{R}(1, \mu, \cdot)$ höchstens so viele freie kritische Werte besitzt wie $R(1, \cdot)$. Via quasikonformer Konjugation übertragen sich diese zwei Eigenschaften auf $\mathcal{R}^*(1, \mu, \cdot)$. Wir wenden das Korollar III.9 an und erkennen, daß einerseits $\mathcal{R}^*(1, \mu, \cdot)$ genauso viele freie kritische Werte wie indifferente Zyklen besitzt (nämlich genauso viele wie $R(1, \cdot)$) und andererseits diese freien kritischen Werte eine ample Menge bilden.

Gleiches gilt für $\mathcal{R}(1, \mu, \cdot)$. Wie bei dem Beweis von Theorem III.12 finden wir eine holomorphe Parametrisierung Φ der Siegel-Scheiben S_μ von $\mathcal{R}(1, \mu, \cdot)$ dem Zentrum z_0 .

d.) Wir beenden nun mit Hilfe der Argumentation aus §2 den Beweis der Proposition IV.6. Vorgegeben sind K (und damit auch ε, r', r'') sowie ein Dreieck Δ (und damit auch $\Theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$). Mit Θ sind auch β und η festgelegt. Wir betrachten die Funktion $\mathcal{R}^*: (\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot \mathcal{R}(1, 1, z)$. Wie in §2 finden wir eine Zahl N so, daß die Ungleichung

$$(12) \quad \left| \frac{\partial x_N}{\partial t}(0, \xi) + N \cdot a^N \cdot \xi \right| = \left| \frac{\partial x_N}{\partial t}(0, \xi) + N \cdot x_N(0, \xi) \right| < \frac{N\eta}{2}$$

gilt. Wir konstruieren nun wie in Schritt a.) beschrieben eine Funktion F so, daß (eventuell nach Verkleinern von δ) gilt:

i.) Die Funktionen $\mathcal{R}(1, \mu, \cdot)$ besitzen für $\mu \in D_\delta(1)$ eine Siegel-Scheibe S_μ mit Zentrum z_0 und $K \subset S_\mu$, Ψ sei deren holomorphe Parametrisierung (s. § III.6).

ii.) Die Funktionen

$$y_N: D_\delta(0) \times D_\delta(0) \times D_{r''}(0) \rightarrow \mathcal{R}^N(\lambda, \mu, \Psi(\mu, z))$$

und

$$x_N: D_\delta(0) \times D_\delta(0) \times D_{r''}(0) \rightarrow \Psi^{-1}(y_N(\lambda, \mu, z))$$

sind wohldefiniert und holomorph (dieses erreichen wir dadurch, daß F holomorph auf $D_\delta(0) \times P_1 \setminus W$ und $F(1, \cdot) \equiv 1$ ist).

iii.) Für alle $\mu \in D_\delta(1)$ ist die Ungleichung

$$(13) \quad \left| \frac{\partial x_N}{\partial t}(0, \mu, \xi) + N \cdot a^N \cdot \xi \right| = \left| \frac{\partial x_N}{\partial t}(0, \mu, \xi) + N \cdot x_N(0, \mu, \xi) \right| < N\eta$$

erfüllt (dieses erreichen wir mit Hilfe der Bedingung $(\mathcal{R}0)$).

Wir wählen t_0 wie im zweiten Paragraphen und erhalten wie dort: $K \subset A_{\lambda, \mu}^*(0)$ für $\lambda, \mu \in \Delta$ und $|\lambda - 1|, |\mu - 1| < \frac{t_0}{N}$, dabei bezeichne $A_{\lambda, \mu}^*(0)$ den sofortigen Attraktionsbereich von 0 bezüglich der Funktion $\mathcal{R}(\lambda, \mu, \cdot)$. Wegen $\mathcal{R}(\lambda, \lambda, \cdot) \equiv \mathcal{R}(\lambda, \cdot)$ folgt die Proposition IV.6. $\square$

Kapitel VI

Approximation rational indifferenter Zyklen

In diesem Kapitel wollen wir rational indifferente Zyklen durch attraktive approximieren. Es wird sich zeigen, daß dabei die Attraktionsbereiche der attraktiven Zyklen in der Hausdorff-Metrik gegen den Attraktionsbereich des rational indifferenten Zyklus konvergieren - wenn gewisse Voraussetzungen erfüllt sind. Wir fixieren eine hyperbolische Komponente G in dem Parameterraum M einer holomorphen Familie $\mathcal{R}$ rationaler Funktionen, für $\lambda \in \overline{G} \cap M$ sei die Anzahl der freien kritischen Punkte von R_λ gleich der Zahl der bezüglich G lokalen Attraktoren von $\mathcal{R}$ (d.h. die Voraussetzungen von Theorem IV.5 sind erfüllt). Wir beweisen in diesem Kapitel die

Proposition IV.7: Es sei $\lambda_0 \in \partial G \setminus E'$ und Δ ein offenes Dreieck in G mit $\overline{\Delta} \cap \partial G = \{\lambda_0\}$. Zu jedem zusammenhängendem Kompaktum K , daß in dem sofortigen Attraktionsbereich A^* eines rational indifferenten Zyklus von R_{λ_0} liegt, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \lambda \in \Delta \Rightarrow K \subset F_\lambda.$$

In dem nächsten Paragraphen reduzieren wir zunächst das Problem auf den Fall, daß K in dem sofortigen Attraktionsbereich eines rational indifferenten Fixpunktes z_0 von R_{λ_0} liegt. Dann bringen wir die Familie $\mathcal{R}$ durch Umparametrisieren und Koordinatentransformationen in eine Normalform. Diese vereinfacht das Studium der Dynamik rationaler Funktionen in der Nähe von rational indifferenten Fixpunkten erheblich. z_0 wird nun für alle λ nahe λ_0 ein Fixpunkt von R_λ sein und für $\lambda \in G$ ein attraktiver. Im zweiten Paragraphen werden wir dann sehen, daß wir uns bei dem Beweis der Proposition auf gewisse Kompakta K , die alle in einer

kleinen Umgebung des rational indifferenten Fixpunktes z_0 von R_{λ_0} liegen, beschränken können. Im dritten Paragraphen werden wir zu jedem $\lambda \in \Delta$ mit λ nahe λ_0 eine Umgebung U_λ des attraktiven Fixpunktes z_0 von R_λ konstruieren, die K enthält und Teilmenge von F_λ ist. Um den Rand von U_λ zu erhalten, werden wir wieder die Methode aus dem Paragraphen II.3 anwenden: Wir suchen eine Kurve γ derart, daß in einem Punkt $z \in \gamma$ der Tangentenvektor von γ durch $R_\lambda(z) - z$ gegeben ist.

§1. Reduktion auf Normalform

Die Ordnung des rational indifferenten Zyklus Z_{λ_0} sei n . Wir ersetzen R_λ durch die n -te Iterierte R_λ^n . Dann sind alle Elemente von Z_{λ_0} Fixpunkte. Weil K zusammenhängend ist, können wir nun davon ausgehen, daß K in dem sofortigen Attraktionsbereich A^* eines rational indifferenten Fixpunktes z_0 von R_{λ_0} liegt. Weil wir $\lambda_0 \in \Gamma \setminus E'$ vorausgesetzt haben, können wir nach Koordinatentransformation und Umparametrisieren annehmen, daß $\mathcal{R}$ von der Form

$$(\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot z + b_2(\lambda)z^2 + \dots$$

ist (mit holomorphen Funktionen b_v). $z_0 = 0$ ist ein rational indifferenter Fixpunkt von R_{λ_0} , somit ist λ_0 eine m -te Einheitswurzel. Wir ersetzen R_λ durch R_λ^m und erhalten für $\mathcal{R}$ wieder eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$(\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot z + b_2(\lambda)z^2 + \dots,$$

aber diesmal mit $\lambda_0 = 1$ und holomorphen Funktionen $b_v \in \mathcal{O}(V)$, wobei V eine geeignete Umgebung von λ_0 ist. Den Parameterwerten $\lambda \in G$ entsprechen nun Parameterwerte aus $\mathbb{D}$ und das Dreieck $\Delta \subset G$ ist in ein Dreieck $\Delta \subset \mathbb{D}$ mit $\overline{\Delta} \cap \partial \mathbb{D} = \{\lambda_0\}$ überführt worden. (**Warnung:** Nur in dem Fall, daß λ_0 keine Ecke von Γ ist, entspricht jeder Parameterwert $\lambda \in \mathbb{D}$ auch einem Parameterwert aus G .) Wir ersetzen Δ durch das

Dreieck $\{\lambda \in \mathbb{D} : \lambda \in \Delta \text{ oder } \overline{\lambda} \in \Delta\}$. Ist die Proposition für dieses neue Dreieck bewiesen, so natürlich auch für das ursprüngliche. Also reicht es, symmetrisch zur reellen Achse liegende Dreiecke, zu betrachten.

Wir zeigen, daß wir uns auf den Fall $K \subset U \cap A^*$ mit einer beliebig kleinen, aber festen Umgebung U des rational indifferenten Fixpunktes $z_0 = 0$ beschränken können. Auf A^* konvergieren die Iterierten von R_{λ_0} lokal gleichmäßig gegen die konstante Funktion $g \equiv z_0$. Daher existiert zu jedem Punkt $z \in A^*$ eine Umgebung $W \subset \subset A^*$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $R_{\lambda_0}^m(W) \subset \subset U \cap A^*$ für $m \geq n$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ so, daß für $m \geq n$ stets $R_{\lambda_0}^m(K) \subset U \cap A^*$ gilt. Dann folgt aus der Stetigkeit von $\mathcal{R}$ die Existenz eines $\delta_1 > 0$ sowie einer zusammenhängenden Umgebung $W \subset \subset A^* \cap U$ von $R_{\lambda_0}^n(K)$ mit: $R_{\lambda_0}^m(W) \subset \subset U \cap A^*$ für alle $m \in \mathbb{N}$ sowie $R_{\lambda}^n(K) \subset W$ für $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$.

Für das Kompaktum $\overline{W}$ sei die Proposition IV.7 bereits bewiesen; wir können annehmen, daß das δ aus der Proposition kleiner als δ_1 ist. Die Rückwärtsinvarianz von F_λ liefert $K \subset F_\lambda$ für $\lambda \in \Delta$ und $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. Also können wir uns bei dem Beweis der Proposition auf den Fall $V = D_\varepsilon(\lambda_0)$ und $R_{\lambda_0}^n(K) \subset U \cap A^*$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) beschränken (mit einem kleinen, positiven ε).

Der sofortige Attraktionsbereich A des rational indifferenten Fixpunktes $z_0 = 0$ ist nicht notwendig zusammenhängend. Nach [Ca] (s. auch [D2], §1.3) ist die Anzahl seiner Komponenten endlich, wir bezeichnen sie mit m . Es gilt $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und existiert auf einer hinreichend kleinen Umgebung U von z_0 eine injektive, holomorphe Funktion ψ_{λ_0} derart, daß $\psi_{\lambda_0} \circ R_{\lambda_0} \circ \psi_{\lambda_0}^{-1}$ nahe z_0 eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$z \mapsto z + z^{m+1} + b_{m+2} \cdot z^{m+2} + \dots$$

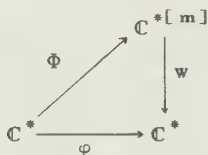
besitzt (s. [D2], §1.3). Man erkennt mittels Potenzreihenansatz, daß ψ_{λ_0} ein Polynom ist. Mit geeigneten Störungen ψ_λ von ψ_{λ_0} erhalten wir eine holomorphe Familie von Polynomen ψ_λ derart, daß für $\lambda \in V$ die Funktion

$\psi_\lambda \circ R_\lambda \circ \psi_\lambda^{-1}$ auf U eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$(\lambda, z) \mapsto \lambda \cdot z + b_{m+1}(\lambda) \cdot z^{m+1} + b_{m+2}(\lambda) \cdot z^{m+2} + \dots$$

mit holomorphen Funktionen $b_\mu \in \mathcal{O}(V)$ besitzt. Wir führen nun wie C. Camacho in [Ca] durch eine Koordinatentransformation die Funktion R_λ in eine Translation über, dieser Schritt wird auch in der Arbeit [DH2] (Exposé n° IX) erläutert.

Die Funktion $\varphi: z \mapsto z^m$ bildet $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph auf sich ab. Mit $\mathbb{C}^{*[m]}$ bezeichnen wir die Riemannsche Fläche der m -ten Wurzel und mit $w: \mathbb{C}^{*[m]} \rightarrow \mathbb{C}^*$ die kanonischen lokalen Koordinaten auf $\mathbb{C}^{*[m]}$. Es sei Φ die Liftung von φ bezüglich w , insbesondere ist Φ eine biholomorphe Abbildung von $\mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{C}^{*[m]}$:



Für $0 < R < r < \infty$ schreiben wir $\mathbb{C}_r^{*[m]} := \{P \in \mathbb{C}^{*[m]} : |w(P)| > r\}$ sowie $\mathbb{C}_R^* := \{P \in \mathbb{C}^* : |w(P)| > R\}$. Wählt man r hinreichend groß und $U = \Phi^{-1}(\mathbb{C}_r^{*[m]})$, so ist die Funktion $f_\lambda := \Phi \circ R_\lambda|_U \circ \Phi^{-1}$ eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{C}_r^{*[m]}$ in $\mathbb{C}_R^*$.

Eine einfache Rechnung (vergl. [DH2], S.2) liefert für f_λ in den w -Koordinaten eine Darstellung der Form

$$w \mapsto \lambda^{-m} \cdot w + b^*(\lambda) + O(w^{-1/m});$$

b^* ist eine auf V holomorphe Funktion mit $b^*(\lambda_0) \neq 0$. Weil wir uns nur für Parameterwerte λ nahe $\lambda_0 = 1$ interessieren, können wir nach Umparametrisierung und Koordinatentransformation annehmen, daß f_λ eine Darstellung der Form

$$(1) \quad w \mapsto \lambda^{-m} \cdot w - 1 + O(w^{-1/m})$$

besitzt. Die höheren Terme sind für $w \in \mathbb{C}_r^{*[m]}$ (unabhängig von λ , also für alle $\lambda \in V$) betragsmäßig kleiner als $C \cdot |w|^{-1/m}$ (mit einer geeigneten positiven Konstanten C).

§2. Reduktion auf bestimmte Kompakta

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gezeigt, daß wir uns auf den Fall $R_{\lambda_0}^n(K) \subset U \cap A^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränken können. Dieses bedeutet insbesondere $f_{\lambda_0}^n(\Phi(K)) \subset \mathbb{C}_r^{*[m]}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein geeignetes $r > 0$. U sollte beliebig klein sein, also können wir r beliebig groß wählen. Für r hinreichend groß und $P \in \mathbb{C}_r^{*[m]}$ gilt

$$\operatorname{Re}(w(f_{\lambda_0}(P))) < \operatorname{Re}(w(P)) - \frac{1}{2}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ und einen Punkt $P \in \Phi(K)$ folgt damit

$$(2) \quad \operatorname{Re}(w(f_{\lambda_0}^n(P))) < \operatorname{Re}(w(P)) - \frac{n}{2}.$$

Also können wir davon ausgehen, daß für $P \in f_{\lambda_0}^n(\Phi(K))$ und $n \in \mathbb{N}$ stets $\operatorname{Re}(w(P)) < -r$ gilt.

Wir haben angenommen, daß das Dreieck Δ symmetrisch zur reellen Achse liegt. Es sei β der Winkel in dem Punkt λ_0 zwischen dieser Achse und den Schenkeln des Dreieckes, wegen $\Delta \subset \mathbb{D}$ gilt offensichtlich $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Wir setzen $\eta := \min\{\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \beta)\}$. r kann so groß gewählt werden, daß für $P \in \mathbb{C}_r^{*[m]}$ stets $|\operatorname{Im}(w(f_{\lambda_0}(P))) - \operatorname{Im}(w(P))| < \frac{1}{2} \tan \frac{\eta}{2}$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ und $P \in \Phi(K)$ erhalten wir dann

$$(3) \quad \pi - \frac{\eta}{2} < \arg(w(f_{\lambda_0}^n(P)) - w(P)) < \pi + \frac{\eta}{2}.$$

Zusammen mit der Ungleichung (2) folgt nun die Existenz einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $\pi - \eta < \arg(w(f_{\lambda_0}^m(P))) < \pi + \eta$ für $m \geq n$ und $P \in \Phi(K)$. Daher können wir uns bei dem Beweis der Proposition auf die Kompakta K mit $\Phi(K) \subset \mathcal{B}'(r, \beta) := \{P \in \mathbb{C}_r^{*[m]} : |\pi - \arg(w(P))| < \eta \text{ und } \operatorname{Re}(w(P)) < -r\}$ beschränken. Es sei $\mathcal{B}(r, \beta) := w(\mathcal{B}'(r, \beta))$.

§ 3. Konstruktion der Umgebung U_λ

Zunächst konstruieren wir für jedes $\lambda \in \Delta$ und λ nahe λ_0 eine punktierte Umgebung $W_\lambda \subset \mathbb{C}^*$ von ∞ , die unter der Abbildung $g_\lambda: w \mapsto \lambda^{-1} \cdot w - 1$ invariant ist und $\mathcal{B}(r, \beta)$ umfaßt. Abschließend zeigen wir, daß W_λ auch noch invariant unter kleinen Störungen von g_λ ist. In den w -Koordinaten ist die Abbildung f_λ (für r hinreichend groß und λ nahe λ_0) eine kleine Störung von g_λ . Also ist $w^{-1}(W_\lambda)$ unter f_λ invariant sowie $U_\lambda := \Phi^{-1}(w^{-1}(W_\lambda)) \cup \{0\}$ für $\lambda \in \Delta$ und λ nahe λ_0 eine unter R_λ invariante Umgebung von 0. Somit gilt für solche Parameterwerte λ stets $K \subset U_\lambda \subset F_\lambda$ und die Proposition IV.7 ist bewiesen.

Nach dem Satz von der Gebietstreue folgt die Invarianz von W_λ unter g_λ aus $g_\lambda(\partial W_\lambda) \subset W_\lambda$.

Wir fixieren nun ein $r > 0$ und schreiben $\mathcal{B}_0 := \partial \mathcal{B}(r, \beta) \cap \{\operatorname{Re} w = -r\}$. Es gilt $g_{\lambda_0}(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}(r, \beta)$ und $d_E(g_{\lambda_0}(\mathcal{B}_0), \partial \mathcal{B}(r, \beta))$ ist unabhängig von r . Hieraus folgt $g_\lambda(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}(r, \beta)$ und $d_E(g_\lambda(\mathcal{B}_0), \partial \mathcal{B}(r, \beta)) > C_1$ für $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$ und mit einer geeigneten, von r unabhängigen Konstanten $C_1 > 0$ und einem (von r abhängigen) $\delta_1 > 0$.

Wir schreiben $\lambda = 1 - a + i \cdot b$ mit $a \in]0, 1[$ und $b \in \mathbb{R}$. Wir lassen in diesem Absatz $\lambda \in \partial \Delta$ zu. Nach Voraussetzung ist $|b| \leq a \cdot \tan \beta$. Aus Symmetriegründen reicht es, den Fall $b \geq 0$ zu untersuchen. Es existiert ein $\delta_2 \in]0, \min\{\tan \eta, \delta_1\}[$ mit $0 \leq \arg(\lambda) < \eta$ für $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta_2$. Dann gilt $0 \geq \arg(\lambda^{-1}) > -\eta$. Für $w \in \mathcal{B}_1 := \partial \mathcal{B}(r, \beta) \cap \{\arg w = \pi + \eta\}$ erhalten wir $\pi < \arg(\lambda^{-1} \cdot w) \leq \pi + \eta$ und $\operatorname{Re}(\lambda^{-1} \cdot w) < \operatorname{Re}(w)$. Es folgt $g_\lambda(w) \in \mathcal{B}(r, \beta)$ mit $\operatorname{Im}(g_\lambda(w)) \geq \operatorname{Im}(w)$ und $\operatorname{Re}(g_\lambda(w)) \leq \operatorname{Re}(w) - 1$. Also existiert eine von r unabhängige Konstante $C_2 > 0$ mit $d_E(g_\lambda(\mathcal{B}_1), \partial \mathcal{B}(r, \beta)) > C_2$.

Wir suchen Punkte $w \in \mathcal{B}_2 := \partial \mathcal{B}(r, \beta) \cap \{\arg w = \pi - \eta\}$ mit $g_\lambda(w) \in \mathcal{B}(r, \beta)$ - hierfür ist die Bedingung $\pi - \eta < \arg(g_\lambda(w) - w) < \pi$ hinreichend.

Wir schreiben $w = -x + iy$ für $w \in \mathcal{B}_2$, es gilt $x, y > 0$. Für die folgende Rechnung ist es angenehmer, wenn wir $\operatorname{Re}(\lambda^{-1} \cdot w) \leq \operatorname{Re} w$ voraussetzen können; dieses folgt aus der Ungleichung

$$(4) \quad -(1-a)x + by \leq -((1-a)^2 + b^2)x;$$

diese ist äquivalent zu $by \leq x(a(1-a) - b^2)$. Nach Voraussetzung haben wir $b < a \tan \beta$, also $a > b \cot \beta$. Außerdem ist $y = x \tan \eta$. Somit folgt (4) aus der Ungleichung $\tan \eta \leq (1-a) \cot \beta - b$. Wir haben $\eta \leq \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \beta) < \frac{\pi}{2} - \beta$ gewählt, hieraus folgt $\tan \eta < \cot \beta$. Für λ nahe λ_0 ist $(1-a)$ nahe 1 und b nahe 0. Also existiert ein $\delta_3 \in]0, \delta_2[$ mit $\tan \eta < (1-a) \cot \beta - b$ für $\lambda \in \Delta$ und $|\lambda - \lambda_0| < \delta_3$. Für diese λ erhalten wir also:

$$(5) \quad w \in \mathcal{B}_2 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda^{-1} \cdot w) \leq \operatorname{Re} w \text{ und } \operatorname{Re}(g_\lambda(w) - w) \leq -1.$$

Wegen $b \geq 0$ ist $\operatorname{Im}(\lambda^{-1} \cdot w) \geq \operatorname{Im} w$ und $\pi > \arg(g_\lambda(w) - w)$. Wir erhalten für $w \in \mathcal{B}_2$ die Abschätzung

$$0 < \tan(\pi - \arg(g_\lambda(w) - w)) = -\frac{\operatorname{Im}(g_\lambda(w) - w)}{\operatorname{Re}(g_\lambda(w) - w)} \leq \operatorname{Im}(g_\lambda(w) - w).$$

Wir suchen nun die $w \in \mathcal{B}_2$, für die $\operatorname{Im}(g_\lambda(w) - w) \leq \tan \frac{\eta}{2}$ gilt. Wegen der Monotonie der Tangens-Funktion folgt $\pi > \arg(g_\lambda(w) - w) > \pi - \eta$, also $g_\lambda(w) \in \mathcal{B}(r, \beta)$.

Es soll

$$\operatorname{Im}(g_\lambda(w) - w) = [xb + (1-a)y - y((1-a)^2 + b^2)] / |\lambda|^2 \leq \tan \frac{\eta}{2}$$

gelten. Wegen $y = x \tan \eta$ und $|\lambda - 1| \leq \delta_3$ folgt dieses aus

$$x[b + a(1-a)\tan \eta - b^2 \tan \eta] \leq (1 - \delta_3)^2 \cdot \tan \frac{\eta}{2}.$$

Hinreichend ist hierfür (wegen $b < a \tan \beta$ und $0 \leq a \leq 1$) die Ungleichung

$$x \cdot a \cdot [(\tan \beta + \tan \eta + a \cdot \tan^2 \beta \cdot \tan \eta) / (1 - \delta_3)^2] \leq \tan \frac{\eta}{2}.$$

Der Term in der eckigen Klammer kann nach oben durch eine Konstante C^* abgeschätzt werden. Für a hinreichend klein gibt es einen Punkt

$\zeta_0(\lambda)$ aus $\mathcal{B}_2$, für den in

$$(6) \quad x \cdot a \cdot C^* \leq \tan \frac{\eta}{2}$$

die Gleichheit gilt. Wir wählen δ_3 so, daß für alle $|\lambda - \lambda_0| < \delta_3$ und $\lambda \in \Delta$ ein solcher Punkt existiert. $\mathcal{B}_{2,\lambda}$ sei die Menge aller Punkte $w \in \mathcal{B}_2$, die die Ungleichung (6) erfüllen, also $\mathcal{B}_{2,\lambda} = \{w \in \mathcal{B}_2 : \text{Rew} \geq \text{Re}\zeta_0(\lambda)\}$

Wir berechnen für $w \in \mathcal{B}_{2,\lambda}$ noch $d_E(g_\lambda(w), \partial \mathcal{B}(r, \beta))$. Elementare Abschätzungen liefern $d_E(g_\lambda(w), \mathcal{B}_1) > r \cdot \tan \eta$, $d_E(g_\lambda(w), \mathcal{B}_2) > \tan \frac{\eta}{2}$ und $d_E(g_\lambda(w), \mathcal{B}_0) > 1$. O.B.d.A. können wir $r \geq 1$ annehmen. Mit den bisherigen Abschätzungen und der von r unabhängigen Konstanten $C_3 := \min\{1, \tan \frac{\eta}{2}\}$ erhalten wir die

Hilfsausage 1: Für $\lambda \in \Delta$ und $|\lambda - \lambda_0| < \delta_3$ gilt stets

$$d(g_\lambda(\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{2,\lambda}), \partial \mathcal{B}(r, \beta)) > \min\{C_1, C_2, C_3\}.$$

Nun verbinden wir den Punkt $\zeta_0(\lambda)$ durch eine außerhalb $\mathcal{B}(r, \beta)$ verlaufende Kurve Γ_λ mit einem Punkt $\zeta_1(\lambda) \in \mathcal{B}_1$, schreiben dann $\mathcal{B}_{1,\lambda} := \{w \in \mathcal{B}_1 : \text{Rew} \geq \text{Re}\zeta_1(\lambda)\}$ und hoffen, daß die Menge $\mathcal{B}_\lambda := \Gamma_\lambda \cup \mathcal{B}_{1,\lambda} \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_{2,\lambda}$ der Rand einer einfach zusammenhängenden, unter g_λ invarianten Umgebung W_λ von ∞ ist.

Bei der Konstruktion von Γ_λ benutzen wir denselben Ansatz wie im Paragraphen II.3: Wir suchen zunächst eine Kurve γ_λ^* , deren Tangentenvektor in einem Punkte w gleich $g_\lambda(w) - w$ ist. Dazu lösen wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\gamma_\lambda^{*\prime}(t) = g_\lambda(\gamma_\lambda^*(t)) - \gamma_\lambda^*(t)$$

mit der Anfangsbedingung $\gamma_\lambda^*(0) = w^*$ und einem beliebigen Punkt $w^* \in \mathbb{C}$. Eine elementare Rechnung liefert als Lösung die (in $w_0(\lambda)$ beginnende und für wachsende t sich nach außen windende) logarithmische Spirale

$$\gamma_\lambda^*(t) = w_0(\lambda) + (w^* - w_0(\lambda)) \cdot \exp(w_0^{-1} \cdot t),$$

wobei $w_0(\lambda) = \lambda / (1 - \lambda)$ der repulsive Fixpunkt von g_λ ist. Wir könnten

$\gamma_\lambda = \gamma_\lambda^*$ setzen. Zur Vereinfachung der noch folgenden Rechnungen wählen wir aber für γ_λ den Kreis um $w_0(\lambda)$ mit dem Radius $\rho(\lambda) = |w_0(\lambda) - \zeta_0(\lambda)|$. Es sei V_λ die unbeschränkte Komponente von $C \setminus \gamma_\lambda$. Wir beweisen die

Hilfssatz 2: V_λ ist unter g_λ invariant.

Beweis: Es reicht, $g_\lambda(\partial V_\lambda) \subset V_\lambda$ zu zeigen. Es sei $w^* \in \partial V_\lambda = \gamma_\lambda$ beliebig. Der Vektor $g_\lambda(w^*) - w^*$ ist der Tangentenvektor der durch den Punkt w^* gehenden logarithmische Spirale γ_λ^* , zeigt also in V_λ . Somit gilt $g_\lambda(\zeta^*) \in V_\lambda$. $\square$

Wir schätzen nun $\rho(\lambda)$ ab. Nach Konstruktion ist $\rho(\lambda) = |w_0(\lambda) - \zeta_0(\lambda)|$. Wir erinnern daran, daß $\zeta_0(\lambda) = a^{-1} \cdot C' \cdot (-1 + itan\eta)$ mit einer positiven Konstanten C' ist, also $|\zeta_0(\lambda)| = a^{-1} \cdot C''$ mit einer von r und λ unabhängigen Konstanten $C'' > 0$. Es gilt $0 < \arg((1-\lambda)^{-1}) \leq \beta$ und $0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\eta}{2}$ für $|\lambda - \lambda_0| < \delta_3$. Hieraus folgt $0 \leq \arg(w_0(\lambda)) \leq \pi - \eta$. Es gilt $a \leq |1-\lambda| \leq a \cdot \cos^{-1} \beta$, also existieren zu der auf Δ stetigen Funktion $h: \lambda \mapsto a |w_0(\lambda)|$ Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < c_1 < h(\lambda) < c_2$ auf Δ . Mit dem Kosinussatz folgt nun $\rho(\lambda) \geq a^{-1} \cdot \sqrt{C''^2 + (h(\lambda))^2}$. Die Abschätzungen von h liefern nun die Existenz einer Konstanten $C > 1$ mit $\rho(\lambda) \geq a^{-1} \cdot C$. Somit erhalten wir die

Hilfssatz 3: Zu vorgegebenen r existiert stets ein $\delta_4 \in]0, \delta_3[$ mit

$$\gamma_\lambda \cap D_r(0) = \emptyset \text{ für } \lambda \in \Delta \text{ und } |\lambda - \lambda_0| < \delta_4.$$

Wir müssen noch $d_E(\gamma_\lambda, g_\lambda(\gamma_\lambda))$ abschätzen. Dazu fixieren wir einen Punkt $w = w_0(\lambda) + \rho(\lambda) \cdot e^{it} \in \gamma_\lambda$ und betrachten $|g_\lambda(w) - w_0(\lambda)| - \rho(\lambda)$. Eine kurze Rechnung liefert $|g_\lambda(w) - w_0(\lambda)| = \rho(\lambda) / |\lambda|$. Somit folgt $|g_\lambda(w) - w_0(\lambda)| - \rho(\lambda) = (\rho(\lambda) \cdot (1 - |\lambda|)) / |\lambda| \geq (1 - \delta_4) C / (\delta_4 \cdot |\lambda|)$.

Wir können $0 < \delta_4 < \frac{1}{2}$ annehmen und erhalten die

Hilfsaussage 4: Es existiert eine von r unabhängige Konstante $C_4 > 0$ mit

$$d_E(g_\lambda(\gamma_\lambda), \gamma_\lambda) \geq d_E(g_\lambda(\partial V_\lambda), \partial \mathcal{B}(r, \beta) \setminus V_\lambda) > C_4$$

für $|\lambda - \lambda_0| < \delta_4$ und $\lambda \in \Delta$.

Wir setzen $W_\lambda = V_\lambda \cup \mathcal{B}(r, \beta)$. Aus den Hilfsaussagen 1 und 4 folgt die

Hilfsaussage 5: Für $\lambda \in \Delta$ und $|\lambda - \lambda_0| < \delta_4$ gilt $g_\lambda(W_\lambda) \subset W_\lambda$ sowie

$$d_E(g_\lambda(W_\lambda), \partial W_\lambda) > \min\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \text{ mit positiven, von } r$$

unabhängigen Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4 .

Die Darstellung von f_λ in den w -Koordinaten und g_λ unterscheiden sich nur Terme der Ordnung $|w|^{-1/m}$; also existiert ein $r > 0$ so, daß $|w(f_\lambda(P)) - g_\lambda(w(P))| < \min\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ für alle $P \in \mathbb{C}_r^{*[m]}$ gilt. Hieraus folgt mit der Hilfsaussage 5, daß $U_\lambda = \Phi^{-1}(\{P : w(P) \in W_\lambda\})$ für $\lambda \in \Delta$ und $|\lambda - \lambda_0| < \delta_4(r)$ invariant unter f_λ ist. Nach dem im zweiten Paragraphen gesagten ist jetzt die Proposition IV.7 bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [Be] Lipman Bers: On Sullivan's Proof of the Finiteness Theorem;
Amer. J. Math. 109-5 (1987) 833 - 852
- [BFH] B. Bielefeld, Y. Fisher, F. v. Haeseler: Computing the Laurent
Series of the Map $\Psi: \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} - M$;
Preprint MPI (Bonn) / 88-46
- [Bl] Paul Blanchard: Complex Analytic Dynamics of the Riemann
Sphere; Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984) 85-141
- [Bo] F.E. Boettcher: The Principal Laws of Convergence and their
Applications to Analysis;
Bull. of the Kasan Math. Soc., 14 (1914) 176ff
- [Br] Hans Broiln; Invariant Sets under the Iteration of Rational
Functions; Arkiv för Mat. 6.6 (1965) 103-144
- [Cr] Hubert Cremer: Zum Zentrumproblem;
Math. Ann. 98 (1927) 151-163
- [Ca] César Camacho: On the Local Structure of Conformal Mappings
and Holomorphic Vector Fields in $\mathbb{C}^2$;
Astérisque 59/60 (1978) 83-94
- [D1] Adrien Douady: Systèmes dynamiques holomorphes;
Séminaire N. Bourbaki, n° 599, novembre 1982;
Astérisque 105/106 (1983) 39-63
- [D2] Adrien Douady: Disques de Siegel et anneaux de Herman;
Séminaire N. Bourbaki, n° 677, février 1987
- [DH1] Adrien Douady / John H. Hubbard: On the dynamics of Polynomial-
Like Mappings; Ann. sci. Éc. Norm. Sup. 18 (1985) 287-343
- [DH2] Adrien Douady / John H. Hubbard: Étude dynamique des polynômes
complexes; Publications Mathématiques d'Orsay 85-04

- [F1] Pierre Fatou: Sur les équations fonctionnelles;
Bull. Math. France 47 (1919) 61-271
- [F2] Pierre Fatou: Sur les équations fonctionnelles;
Bull. Math. France 48 (1920) 33-94
- [F3] Pierre Fatou: Sur les équations fonctionnelles;
Bull. Math. France 48 (1920) 208-314
- [FL] Wolfgang Fischer, Ingo Lieb; Funktionentheorie,
Braunschweig, 1980
- [Fo] Otto Forster: Riemannsche Flächen; Berlin, 1977
- [GMG] John Guckenheimer / Richard McGehee: A Proof of the N^2 Conjecture;
Report of the Mittag-Leffler Institute, Djursholm, 1984
- [vHP] Friedrich von Haeseler / Heinz-Otto Peitgen: Newton's Method
and Complex Dynamical Systems;
Acta Appl. Math. 13 (1988) 3-58
- [H] Michael R. Herman: Recent Results and some Open Questions on
Siegel's Linearization Theorem of Germs of Complex
Analytic Diffeomorphisms of C^n Near a Fixed Point;
Proc. VIIIth Internat. Conf. Math.-Phys., World Sc. Publ.,
Singapour, 1987
- [J] Gaston Julia: Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles;
Jour. Math. pures et appl. 8 (1918) 47-245
- [Ko] G. Koenigs: Recherches sur les équations fonctionnelles;
Ann. sci. Éc. Norm. Sup. 1 (1884)
- [La] Pierre Lavours: Étude asymptotique de l'ensemble de Julia de
 $z \mapsto z^2 + c$ pour c tendant vers $\frac{1}{4}$; Preprint 1987
- [Las] Andrzej Lasota: Probabilistic Properties of Deterministic Systems;
Cambridge, 1985
- [Le] Olli Lehto: Univalent Functions and Teichmüller Spaces;
New York, 1987

- [MSS] R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan: On the Dynamics of rational Maps;
Ann. sci. Éc. Norm. Sup. 16 (1983) 193-217
- [PeRi] Heinz-Otto Peitgen, Peter H. Richter: Morphologie komplexer Grenzen;
Bremen, 1984
- [PR] Christian Pommerenke, Burton Rodin: Holomorphic Families of
Riemann Mapping Functions;
J. Math. Kyoto Univ. 26 - 1 (1986) 13 - 22
- [Ra] R. Michael Range: Holomorphic Functions and Integral Representations
in Several Complex Variables; New York, 1986
- [Si] Carl L. Siegel: Iteration of Analytic Functions;
Ann. of Math. 43 (1942) 607-612
- [SM] C. L. Siegel, J. Moser: Lectures on Celestial Mechanics,
New York 1987
- [Sh] Mitsuhiro Shishikura: On the Quasiconformal Surgery of rational
Functions; Ann. sci. Éc. Norm. Sup. 20 (1987) 1-29
- [SI] Dennis P. Sullivan: Quasiconformal homeomorphisms and Dynamics I;
Annals of Mathematics 122 (1985) 401-418
- [SII] Dennis P. Sullivan: Quasiconformal homeomorphisms and Dynamics II;
Acta Mathematica 155 (1985) 243-260
- [SIII] Dennis P. Sullivan: Quasiconformal homeomorphisms and Dynamics III;
Preprint IHES / M / 83 / 1
- [ST] Dennis P. Sullivan, William P. Thurston: Extending Holomorphic Motions;
Acta Mathematica 157 (1986) 239 - 257
- [vdW] B. L. van der Waerden: Algebra I; Berlin, 1971
- [Y1] Jean-Christophe Yoccoz: Linéarisation des germes de difféomorphismes
holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$; C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I.,
306 (1988) 55-58
- [Y2] Jean-Christophe Yoccoz: Théorème de Siegel, nombres de Brjuno
et polynômes quadratiques; Preprint 1988

